Lösningar till Tentamen i Introduktionskurs i Matematik, 5p

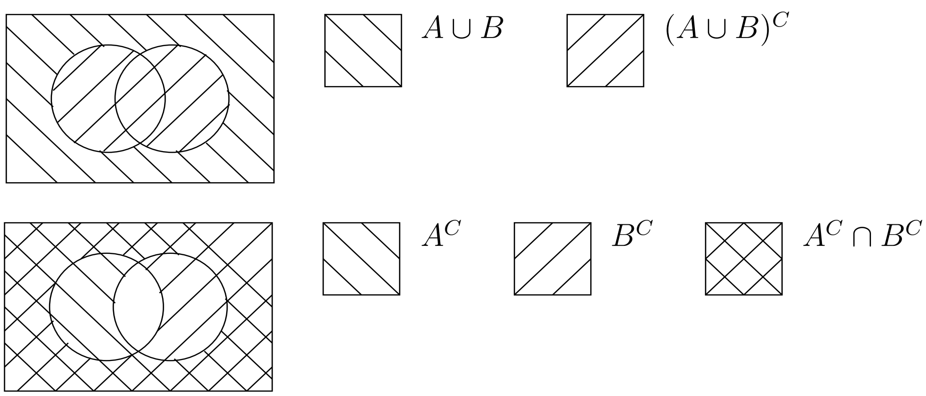
Distanskurs
28 oktober, 2006, kl. 9.00–13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844).

1. Formulera en av de Morgans lagar och bevisa den m.h.a.
   (a) Venn-diagram. (2p)
   (b) logiskt resonemang (ej detsamma som mängdtillhörighetstabell). (3p)

Lösning: De Morgans lagar är $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ (denna bevisas här)
$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ (beviset för den är analogt).

(a)



(b) Ett logiskt resonemang för att bevisa att en mängd, M_1, är lika med en annan, M_2, läggs lämpligen upp enligt följande: Man tar först ett element godtyckligt ur M_1 och resonerar sig fram till att det måste finnas i M_2. Detta innebär då att $M_1 \subseteq M_2$. På samma sätt resonerar man sedan om att ett element ur M_2 måste finnas i M_1. Därmed har man att $M_1 \supseteq M_2$. Totalt är alltså $((M_1 \supseteq M_2) \wedge (M_1 \subseteq M_2)) \Leftrightarrow M_1 = M_2$. Ok, låt oss börja!

Tag $x \in (A \cup B)^C$. Då är $x \notin A \cup B$, dvs $(x \notin A) \wedge (x \notin B)$, dvs $(x \in A^C) \wedge (x \in B^C)$, dvs $x \in A^C \cap B^C$. Detta visar att $(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C$.
Tag nu istället $x \in A^C \cap B^C$. Då har vi (på samma sätt fast baklänges) att $(x \in A^C) \wedge (x \in B^C)$, dvs $(x \notin A) \wedge (x \notin B)$, dvs $x \notin A \cup B$, dvs $x \in (A \cup B)^C$.
Detta visar att $A^C \cap B^C \subseteq (A \cup B)^C$.
Totalt har vi därmed att $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$. $\square$

2. Bevisa att om $a > 1$ och $b > 0$ så gäller att $\dfrac{\log_a x}{x^b} \to 0$ då $x \to \infty$. (3p)

Lösning: (Detta är en omedelbar konsekvens av att $x^b/\log_a x \to \infty$ då $x \to \infty$ vilket finns bevisat på s. 81–82 i *Analys i en variabel* av Persson & Böiers.) $\square$

3. Betrakta utsagan $(P \wedge \neg R) \Rightarrow \Big((P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R)\Big)$.

   (a) Bilda den kontrapositiva formen. (3p)

   (b) Är utsagan en tautologi, kontradiktion eller ingetdera? (3p)

Lösning:

(a) Den kontrapositiva formen av $A \Rightarrow B$ är $\neg B \Rightarrow \neg A$. Vidare är $\neg(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$. Alltså är den kontrapositiva formen av utsagan ovan

$\neg((P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R)) \;\Rightarrow\; \neg(P \wedge \neg R)$

$\Longleftrightarrow$

$(\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(Q \wedge \neg R)) \;\Rightarrow\; (P \Rightarrow R)$

$\Longleftrightarrow$

$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \;\Rightarrow\; (P \Rightarrow R)$

(b)

P	Q	R	$((P \Rightarrow Q)$	$\wedge$	$(Q \Rightarrow R))$	$\Rightarrow$	$(P \Rightarrow R)$
S	S	S	S	S	S	$\boldsymbol{S}$	S
F	S	S	S	S	S	$\boldsymbol{S}$	S
S	F	S	F	F	S	$\boldsymbol{S}$	S
F	F	S	S	S	S	$\boldsymbol{S}$	S
S	S	F	S	F	F	$\boldsymbol{S}$	F
F	S	F	S	F	F	$\boldsymbol{S}$	S
S	F	F	F	F	S	$\boldsymbol{S}$	F
F	F	F	S	S	S	$\boldsymbol{S}$	S

Alltså är utsagan en tautologi. $\square$

4. Lös ekvationen $(2-3i)z^2+9+6i=(9-7i)z$. (3p)

Lösning: $z^2+\underbrace{\frac{-9+7i}{2-3i}}_{-3-i}z+\underbrace{\frac{9+6i}{2-3i}}_{3i}=0$

$\Rightarrow\ z=\frac{3+i}{2}\pm\sqrt{\frac{(3+i)^2}{4}-3i}=\frac{3+i}{2}\pm\underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{8-6i}}_{=a+bi}$

$\Rightarrow\ \frac{1}{4}(8-6i)=(a+bi)^2=a^2+2abi-b^2$

$\Rightarrow\ \left\{\begin{array}{rcrl} a^2-b^2 & = & 2 & (1) \\ 2ab & = & -\frac{3}{2} & (2) \end{array}\right.\quad (2)\ \Rightarrow\ a=-\frac{3}{4b}\overset{(1)}{\Rightarrow}\ \frac{9}{16b^2}-b^2=2\overset{\{t=b^2\}}{\Rightarrow}$

$\overset{\{t=b^2\}}{\Rightarrow}\ t^2+2t-\frac{9}{16}=0\ \Rightarrow\ t=-1\pm\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\{\frac{1}{4}\text{ eller }(-\frac{9}{4})\}$. Eftersom $t=b^2\geq 0$ måste $t=\frac{1}{4}$, varmed $b=\pm\frac{1}{2}$ och $a=\pm\sqrt{2+b^2}=\pm\frac{3}{2}$. Vidare eftersom $2ab=-\frac{3}{2}$ måste a och b vara av olika tecken, dvs $\frac{1}{2}\sqrt{8-6i}$ är $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ eller $-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$. Därmed är lösningarna till ekvationen $z=\frac{3+i}{2}\pm\frac{3-i}{2}$, dvs $z_1=3$ och $z_2=i$ (vilket som vanligt enkelt kontrolleras genom instättning i ekvationen.) □

5. Av 1000 tal är 302 stycken delbara med 3, 246 stycken delbara med 4 och 127 stycken delbara med 12. Hur många är varken delbara med 3 eller 4? (3p)

Lösning: Låt A vara mängden av de tal (av de 1000) som är delbara med 3, B de tal som är delbara med 4. Då är[1] $A\cap B$ de tal som är delbara med 12 (dvs delbara med både 3 och 4) varmed de tal som är delbara med 3 eller 4 eller både och är $A\cup B$, och de tal som är varken delbara med 3 eller 4 är $(A\cup B)^C$. Eftersom $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=302+246-127=421$ (se Övning 53 a, s. 40 i *Diskret matematik* av Bergström) så är antalet tal som varken är delbara med 3 eller 4: $|(A\cup B)^C|=1000-|A\cup B|=579$. □

6. Bestäm koefficienten framför $a^{14}b^2$ i utvecklingen av $(\frac{a}{2b}-6a^2b^2)^{10}$. (3p)

Lösning: Vid utvecklingen av $(\frac{a}{2b}-6a^2b^2)^{10}$ blir termerna enligt binomialteoremet $\binom{10}{k}(\frac{a}{2b})^k(-6a^2b^2)^{10-k}=\binom{10}{k}\frac{(-6)^{10-k}}{2^k}a^{20-k}b^{20-3k}$. Därmed får vi termen med $a^{14}b^2$ då $k=6$ varmed koefficienten är $\binom{10}{6}\frac{(-6)^4}{2^6}=-\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{(2\cdot 3)^4}{2^6}=-\frac{8505}{2}$. □

[1] Rita gärna Venn-diagram för att underlätta för tanken vid denna typ av resonemang!

7. Lös rekurrensekvationen $4x_{n+2} - 5x_{n+1} + x_n = 2n + \frac{20}{3}$ där $x_0 = x_1 = 1$. (4p)

Lösning:

Hom. ekv: $4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$
$(\lambda - 1)(4\lambda - 1) = 0$
$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{1}{4}$
$x_{hn} = A \cdot 1^n + B \cdot (\frac{1}{4})^n = A + \frac{B}{4^n}$

Part. lösn.: Ansätter $x_n = an + b$ (eftersom högerledet är ett polynom av grad 1) $\Rightarrow 4x_{n+2} - 5x_{n+1} + x_n = 4a(n+2) + 4b - 5a(n+1) - 5b + an + b = 3a$ oberoende av n, vilket inte är så bra eftersom högerledet är $2n + \frac{20}{3}$ som är en funktion av n. Eftersom konstanttermen försvinner ur $4x_{n+2} - 5x_{n+1} + x_n$ kan vi ignorera den och istället ansätta $x_n = an^2 + bn$. Då får vi $4x_{n+2} - 5x_{n+1} + x_n = 4a(n+2)^2 + 4b(n+2) - 5a(n+1)^2 - 5b(n+1) + an^2 + bn = 6an + (11a + 3b)$. Detta ska bli lika med $2n + \frac{20}{3}$ varmed $a = \frac{1}{3}$ och $b = 1$.
Därmed är partikulärlösningen $x_{pn} = \frac{1}{3}n^2 + n$.

Allm. lösn.: $x_n = x_{hn} + x_{pn} = A + \frac{B}{4^n} + \frac{1}{3}n^2 + n$.
Om vi nu sätter in begynnelsevillkoren $x_0 = x_1 = 1$ får vi
$1 = x_0 = A + B$ och $1 = x_1 = A + \frac{B}{4} + \frac{1}{3} + 1$ varmed
$4A + (1 - A) = -\frac{4}{3} \Rightarrow A = -\frac{7}{9} \Rightarrow B = \frac{16}{9}$.
Alltså är slutligen $x_n = -\frac{7}{9} + \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3}n^2 + n = \frac{1}{9}(4^{2-n} - 7 + 3n^2 + 9n)$. □

8. Visa att $17^{27} + 37^{47} \equiv 87^{97} \pmod 7$. (3p)

Lösning: Vi har (mod 7) att
$17^{27} \equiv ((17-14)^3)^9 = 27^9 \equiv (27-28)^9 = -1$
$37^{47} \equiv (37-35)^{45+2} = 2^{45} \cdot 2^2 = (2^3)^{15} \cdot 4 \equiv (8-7)^{15} \cdot 4 = 4$
$87^{97} \equiv (87-84)^{96+1} = 3^{12 \cdot 8} \cdot 3 = (3^3)^{32} \cdot 3 \equiv (27-28)^{32} \cdot 3 = 3$
Totalt är alltså $17^{27} + 37^{47} - 87^{97} \equiv -1 + 4 - 3 = 0 \pmod 7$,
dvs $17^{27} + 37^{47} \equiv 87^{97} \pmod 7$. □