Lösningar till tentamen i Introduktionskurs i Matematik, 5p

Distanskurs
24 oktober, 2005, kl. 9.00–13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 070-306 95 89).

1. Bevisa att $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b+c)$. (2p)

   Lösning: (Se sats 2.1, s. 17, Diskret matematik av Bergstrand.) □

2. Formulera och bevisa satsen om faktorisering av polynom i komplexa nollställen. (3p)

   Lösning: (Se sats 9, s. 464, Analys i en variabel av Persson och Böiers.) □

3. Visa med sanningsvärdestabell att $(P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg(Q \Rightarrow P)$ är en kontradiktion. (2p)

   Lösning:

P	Q	$(P \vee \neg Q)$	$\Leftrightarrow$	$\neg(Q \Rightarrow P)$
S	S	S	$\boldsymbol{F}$	F
S	F	S	$\boldsymbol{F}$	F
F	S	F	$\boldsymbol{F}$	S
F	F	S	$\boldsymbol{F}$	F

□

4. Låt $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{1+a_{n-2}}$, $n \geq 2$. Bevisa att $a_{n+1} \leq a_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (3p)

   Lösning: Vi har att $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_{n-1}} \leq a_n$ omm $1 + a_{n-1} \geq 1$, dvs omm $a_{n-1} \geq 0$.
   Att $a_{n-1} \geq 0$ visas genom induktion:
   Basfall: $a_0 = a_1 = 1 > 0$ (ok).
   Ind.ant.: Antag $a_k > 0$ för alla $k \leq n-1$.
   Ind.steg: Ska visa att $a_n > 0$. $a_{n-1} > 0$ och $a_{n-2} > 0 \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-2}} > 0$.
   Alltså är även $a_{n+1} \leq a_n$ för alla $n \in \mathbb{Z}^+$. □

5. En säck potatis kan plockas ur genom att ta 9 potatisar åt gången vilket slutar med 7 potatisar kvar. Om man istället tar 5 potatisar åt gången blir det 3 potatisar kvar. Hur många potatisar måste det åtminstone finnas i säcken? (3p)

Lösning: Antag att säcken innehåller A potatisar. Då är $9x + 7 = A$ och $5y + 3 = A$ varmed $9x - 5y + 7 - 3 = 0$, dvs $9x - 5y = -4$. Hjälpekv. $9x - 5y = 1$ med lösning $(x_h, y_h) = (-1, -2)$ så partikulärlösning till $9x - 5y = -4$ är $(x_p, y_p) = -4(-1, -2) = (4, 8)$ varmed allmän lösning är $(x, y) = (4 + 5m, 8 + 9m)$:

m	-1	0	1	$\dots$
x	-1	4	9	$\dots$
$9x + 7$	-2	43	88	$\dots$

Därmed måste det åtminstone funnits 43 potatisar i säcken. $\square$

6. Beräkna så långt som möjligt $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} \frac{5^{k-1}}{2^{2k+1}}$. (2p)

Lösning:

$$\sum_{k=0}^{100} \frac{5^{k-1}}{2^{2k+1}} = \frac{5^{-1}}{2} \sum_{k=0}^{100} \left(\frac{5}{2^2}\right)^k = 0.1 \cdot \frac{1 - (\frac{5}{4})^{101}}{1 - \frac{5}{4}} = 0.1 \cdot (-4) \cdot (1 - (\tfrac{5}{4})^{101}) = 0.4(1.25^{101} - 1).$$

$\square$

7. Beräkna koefficienten för x^8y^3-termen i utvecklingen av $\displaystyle\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)^{11}$. (3p)

Lösning: Enligt binomialsatsen är $(\frac{x}{2} - \frac{y}{3})^{11} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} (\frac{x}{2})^k (-\frac{y}{3})^{11-k}$. Alltså är koefficienten framför x^8y^3-termen $\binom{11}{8}(\frac{1}{2})^8(-\frac{1}{3})^3 = -\frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2^8 \cdot 3^3} = -\frac{11 \cdot 5}{2^8 \cdot 3^2} = -\frac{55}{2304}$. $\square$

8. Lös fullständigt rekurrensekvationen
$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 2n + 1,\ n \in \mathbb{N}$. (3p)

Lösning:

Hom.ekv.: $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$

Karakteristisk ekvation $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

$\Rightarrow\ x_{hn} = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n = A + B \cdot 2^n$.

Part.lösn.: Ansätt polynom av samma grad som högerledet: $x_n = an + b$

$\Rightarrow\ x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = a(n+2) + b - 3(a(n+1) + b) + 2(an + b) = a = 2n + 1$

funkar inte! Öka en grad – ansätt: $x_n = an^2 + bn + c$

$\Rightarrow\ x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n =$

$= a(n+2)^2 + b(n+2) + c - 3(a(n+1)^2 + b(n+1) + c) + 2(an^2 + bn + c) =$

$= -2an + a - b = 2n + 1$

$\Rightarrow\ (1) : -2a = 2$ och $(2) : a - b = 1\ \Rightarrow a = -1, b = -2$. (Eftersom vi redan har en godtycklig konstant A i x_{hn} kan vi utelämna c ur räkningarna.)

Alltså är $x_{pn} = -n^2 - 2n$.

Allm.lösn.: $x_n = x_{hn} + x_{pn} = A + B \cdot 2^n - n^2 - 2n$.

Fullst.lösn.: $x_0 : 0 = A + B$ och $x_1 : 1 = A + 2B - 3$

$x_0\ \Rightarrow\ A = -B \overset{x_1}{\Rightarrow} -B + 2B = 1 + 3\ \Rightarrow\ B = 4, A = -4$.

$x_n = -4 + 4 \cdot 2^n - n^2 - 2n = 2^{n+2} - n(n+2) - 4$. $\square$

9. Polynomen $p_1(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24$ och $p_2(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 8$ har gemensamma nollställen. Lös fullständigt ekvationen $p_1(x) = 0$. (3p)

Lösning: För att ta reda på gemensamma nollställen försöker vi bestämma det polynom som är största gemensamma delare till p_1 och p_2 m.h.a. Euklides algoritm:

$$\begin{aligned}
x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 8 &= (x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24) - 2x^3 + 8x^2 - 8x + 32 \\
&\quad \{-2x^3 + 8x^2 - 8x + 32 = -2(x^3 - 4x^2 + 4x - 16)\} \\
x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24 &= (x^3 - 4x^2 + 4x - 16)(x + 3) + 6x^2 + 24 \\
&\quad \{6x^2 + 24 = 6(x^2 + 4)\} \\
x^3 - 4x^2 + 4x - 16 &= (x^2 + 4)(x - 4) + 0
\end{aligned}$$

Alltså är SGD$(x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 8, x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24) = x^2 + 4$ varmed de gemensamma nollställena ges av $x^2 + 4 = 0$, dvs $x_1 = -2i$ och $x_2 = 2i$. De andra nollställena fås av att bryta ut faktorn $x^2 + 4$ och lösa den andra andragradaren. $p_1(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24 = (x^2 + 4)(x^2 - x - 6)$ varmed $x^2 - x - 6 = 0\ \Rightarrow\ x_3 = -2$ och $x_4 = 3$. $\square$

10. Lös ekvationen $z^7 - 1 = \sqrt{3}\, i$ m.a.p. $z \in \mathbb{C}$. (3p)

Lösning: Ekvationen är $z^7 = 1 + \sqrt{3}\, i$. På polär form är $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ så $z^7 = r^7(\cos(7\theta) + i\sin(7\theta))$. Högerledet på polär form är $1 + \sqrt{3}\, i = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos(\frac{\pi}{3} + 2\pi k) + i\sin(\frac{\pi}{3} + 2\pi k))$. Därmed har vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} r^7 &= 2 \\ 7\theta &= \frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$$

med lösningsmängden $\{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) : r = 2^{1/7} \text{ och } \theta = \frac{\pi}{3\cdot 7} + \frac{2}{7}\pi k\}$ och eftersom $\theta = \frac{\pi}{3}$ med $k = 1$ kan lösningsmängden enklast skrivas
$\{z = 2^{1/7}(\cos\theta + i\sin\theta) : \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{7}\pi k \text{ där } k = 0, 1, 2, \ldots, 6\}$. □

11. Lös ekvationen $2\ln(\cos x) + \ln(\sin(2x)) = \ln(\sin x \cos x) - \ln 2$ m.a.p. $x \in \mathbb{R}$. (3p)

Lösning: Under antagandet att argumenten till ln är positiva är
$2\ln(\cos x) + \ln(\sin(2x)) = \ln(\sin x \cos x) - \ln 2$
$\Leftrightarrow\ \ln((\cos x)^2 \sin(2x)) = \ln(\frac{1}{2}\sin x \cos x)$
$\Leftrightarrow\ 2\cos^2 x \sin(2x) = \sin x \cos x$
$\Leftrightarrow\ 2\cos^2 x(2\sin x \cos x) = \sin x \cos x \quad \{\sin x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k\}$.
Om $\sin x \neq 0$ kan vi dividera med detta i båda led varmed
$4\cos^3 x = \cos x \quad \{\cos x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \pi k\}$
Om $\cos x \neq 0$ kan vi dividera även med detta i båda led varmed
$4\cos^2 x = 1 \ \Leftrightarrow\ \cos x = \pm\frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$.
Emellertid vill vi även att argumenten till ln ska vara positiva,
dvs att $(1) : \cos x > 0$, $(2) : \sin 2x > 0$ och att $(3) : \sin x \cos x > 0$.
$(1) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
$(2) \Rightarrow 0 < 2x < \pi \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$
$(3) \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2}$ eller $-\pi < x < -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
$(1) \wedge (2) \wedge (3) \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
Alltså är de enda lösningarna som klarar villkoren (1), (2) och (3) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. □