Lösningar till Tentamen i Introduktionskurs i Matematik, 5p

Distanskurs
8 januari, 2005, kl. 9.00–13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 070-306 95 89).

1. Bevisa att det finns oändligt många primtal. (3p)

   Lösning: (Se Diskret matematik av Bergström, Sats 2.3, s. 18.) □

2. Antag att ekvationen $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$ har roten $x = p/q$ (maximalt förkortat) där $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är heltal. Bevisa att $p|a_0$ och $q|a_n$. (3p)

   Lösning: (Se Diskret matematik av Bergström, Sats 2.10, s. 23.) □

3. Beräkna det minsta positiva heltal a så att $7^{7^{7^7}} \equiv a \pmod 6$. (3p)

   Lösning: $7^{7^{7^7}} \equiv (7-6)^{7^{7^7}} = 1 \pmod 6$, dvs $a = 1$. □

4. Bestäm samtliga rötter till ekvationen $x = \sqrt{3x^2 + 3x - 2}$. (3p)

   Lösning: För att vara giltig lösning måste $x > 0$ och $3x^2 + 3x - 2 > 0$.
   Kvadrering av båda led ger
   $x^2 = 3x^2 + 3x - 2 \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$
   Eftersom $x > 0$ är ej $x = -2$ en lösning. Kontroll av det andra villkoret för $x = \frac{1}{2}$: $3(\frac{1}{2})^2 + 3\frac{1}{2} - 2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - 2 = \frac{1}{4}$ (ok). Alltså är det enda värde på x som satisfierar ekvationen $x = \frac{1}{2}$. □

5. En flicka är mer än dubbelt så gammal men mindre än åtta gånger så gammal som sin bror och differensen mellan sju gånger flickan ålder och sex gånger pojkens ålder är hundra år. Hur gamla är syskonen? (3p)

   Lösning: Låt x vara flickans ålder och y pojkens. Då är $2y < x < 8y$ och $7x - 6y = 100$. SGD$(6, 7) = 1$ och en partikulärlösning är $(x_p, y_p) = (16, 2)$. Därmed är den allmänna lösningen $(x, y) = (16 - 6t, 2 - 7t)$ och vi får

$$\begin{array}{rrrl} t & x & y & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 16 & 2 & \text{men } 16 \not< 8 \cdot 2 \\ -1 & 22 & 9 & \\ -2 & 28 & 16 & \text{men } 28 \not> 2 \cdot 16 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

varmed enda möjligheten är att flickan är 22 år och pojken 9 år. $\square$

6. Dela upp bråket $\dfrac{18x^3 - 3x^2 + 6x - 1}{6x^2 - x - 2}$ i irreducibla partialbråk. (3p)

Lösning: $\frac{18x^3-3x^2+6x-1}{6x^2-x-2} = \{\text{polynomdivision}\} = 3x + \frac{12x-1}{6x^2-x-2}$.
För att dela upp $\frac{12x-1}{6x^2-x-2}$ i partialbråk tar vi först reda på nämnarens nollställen: $6x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -\frac{1}{2}$. Detta innebär att $\frac{12x-1}{6x^2-x-2} = \frac{12x-1}{6(x-\frac{2}{3})(x+\frac{1}{2})} = \frac{12x-1}{(3x-2)(2x+1)}$ kan skrivas som $\frac{A}{3x-2} + \frac{B}{2x+1}$ där A och B är konstanter.
$\frac{A}{3x-2} + \frac{B}{2x+1} = \frac{A(2x+1)+B(3x-2)}{(3x-2)(2x+1)} = \frac{(2A+3B)x+A-2B}{(3x-2)(2x+1)} \Rightarrow \begin{cases} 2A+3B &= 12 \\ A-2B &= -1 \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} A-2B &= -1 \\ 7B &= 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= 3 \\ B &= 2 \end{cases}$ varmed slutligen $\frac{18x^3-3x^2+6x-1}{6x^2-x-2} = 3x + \frac{3}{3x-2} + \frac{2}{2x+1}$.
$\square$

7. I tärninsspelet YATZI slår man 5 tärningar och samlar på “pokerkombinationer”. På hur många sätt kan man få *två par* (dvs två tärningar av en valör, två tärningar av en annan valör och den femte tärningen av en tredje valör) om man bara slår alla tärningar en gång? (3p)

Lösning: Antalet sifferkombinationer som ger två par är
6 möjliga utfall av första tärningen
1 för att andra ska bilda par med första
5 möjliga utfall av tredje tärningen
1 för att fjärde ska bilda par med andra
4 möjliga utfall av femte tärningen
Totalt blir det $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ olika kombinationer. Dessa kan permuteras på $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 30$ sätt. Alltså kan man få två par i YATZI på $120 \cdot 30 = 3600$ sätt. $\square$

8. Lös fullständigt ekvationen $z^2 + (1 - 2i)z + 1 + 5i = 0$. (3p)

Lösning: Enligt välkända metoder för andragradsekvationer har vi att $z = -\frac{1-2i}{2} \pm \sqrt{(\frac{1-2i}{2})^2 - 1 - 5i}$. Kruxet med komplexa andragradsekvationer är att problemen bara började – det gäller nu att komma underfund med vad $\sqrt{(\frac{1-2i}{2})^2 - 1 - 5i}$ för att komma fram till lösningen. Låt oss först renskriva och sedan ansätta det komplexa talet $\alpha + \beta i$ så kan vi härleda värdet av roten genom kvadrering av båda led. Vi får $\sqrt{(\frac{1-2i}{2})^2 - 1 - 5i} = \sqrt{\frac{-7-24i}{4}} = \alpha + \beta i$ varmed $\alpha^2 + 2\alpha\beta i - \beta^2 = -\frac{7}{4} - 6i$. Identifiering av real- respektive imaginärdel ger att $\left\{\begin{array}{rcl} \alpha^2 - \beta^2 & = & -\frac{7}{4} \\ \alpha\beta & = & -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \frac{9}{\beta^2} - \beta^2 & = & -\frac{7}{4} \\ \alpha\beta & = & -3 \end{array}\right.$

$9 - \beta^4 + \frac{7}{4}\beta^2 = 0 \; \{b = \beta^2\} \;\Rightarrow\; b^2 - \frac{7}{4}b - 9 = 0 \;\Rightarrow\; b = \frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49}{64} + 9} = \frac{7}{8} \pm \frac{25}{8} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; b = 4$ (eftersom $b = \beta^2 \geq 0$) $\Rightarrow\; \beta = 2,\ \alpha = -\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{-7-24i}{4}} = -\frac{3}{2} + 2i \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; z = \frac{1}{2}(-1 + 2i \pm (-3) + 4i) = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}(-4 + 6i) = -2 + 3i \\ \frac{1}{2}(2 - 2i) = 1 - i \end{array}\right. \qquad \square$$

9. Är utsagan $x \in A\backslash B \wedge y \in B\backslash C \wedge z \in C\backslash A \;\Rightarrow\; \{x, y, z\} \subseteq (A \cap B \cap C)^C$ en tautologi, kontradiktion eller ingetdera? (Avgör med hjälp av sanningsvärdestabell eller logiskt resonemang.) (3p)

Lösning:
$x \in A\backslash B \;\Rightarrow\; x \notin B \;\Rightarrow\; x \in B^C \;\Rightarrow\; x \in A^C \cup B^C \cup C^C = (A \cap B \cap C)^C$ (1).
$y \in B\backslash C \;\Rightarrow\; y \in C^C \;\Rightarrow\; y \in (A \cap B \cap C)^C$ (2).
$z \in C\backslash A \;\Rightarrow\; y \in A^C \;\Rightarrow\; y \in (A \cap B \cap C)^C$ (3).
$(1) \wedge (2) \wedge (3) \;\Rightarrow\; x, y, z \in (A \cap B \cap C)^C \;\Rightarrow\; \{x, y, z\} \subseteq (A \cap B \cap C)^C$.
Alltså: Tautologi! $\square$

10. Visa att $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n} k$ för alla positiva jämna heltal n. (3p)

Lösning: Vet att $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (detta kan annars visas med induktion.) Ska således visa att även $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ då n är jämnt, dvs att $\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k k^2 = \frac{2m(2m+1)}{2} = m(2m+1)$ då m är ett heltal. Detta gör vi med induktion enl. följande.

Basfall $m = 1$: $\sum_{k=1}^{2}(-1)^k k^2 = -1 + 2^2 = 3$ och $1 \cdot (2 \cdot 1 + 1) = 3$ (ok)

Ind.ant. $\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k k^2 = m(2m+1)$ $(*)$

Ind.steg Vi ska visa att $\sum_{k=1}^{2m+2}(-1)^k k^2 = (m+1)(2m+3)$

$$\sum_{k=1}^{2m+2}(-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{2m}(-1)^k k^2 + (-1)^{2m+1}(2m+1) + (-1)^{2m+2}(2m+2) \stackrel{(*)}{=}$$
$$= m(2m+1) - (4m^2 + 4m + 1) + (4m^2 + 8m + 4) =$$
$$= 2m^2 + (1 - 4 + 8)m + (-1 + 4) = 2m^2 + 5m + 3.$$

Men $(m+1)(2m+3) = 2m^2 + 3m + 2m + 3 = 2m^2 + 5m + 3$.

$\square$