Lösningar till Tentamen i Envariabelanalys, 5p

Distanskurs
2 juni, 2007 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844)

1. Formulera och bevisa Analysens huvudsats. (3p)

   Lösning: (Se s. 296–297 i *Analys i en variabel* av Persson Böiers, eller föreläsningsanteckningarna.) $\square$

2. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(1-\cos x)}{\ln(1+x)+2-2\sqrt{1+x}}$. (3p)

   Lösning: T-utv. kring a: $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$
   $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$
   $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$
   $\sin(1-\cos x) = \sin(\frac{x^2}{2} - \mathcal{O}(x^4)) = \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$
   $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \mathcal{O}(x^4)$
   $2\sqrt{1+x} = 2 + x - \frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^3)$
   $$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(1-\cos x)}{\ln(1+x)+2-2\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\mathcal{O}(x^4)+2-(2+x-\frac{x^2}{4}+\mathcal{O}(x^3))} =$$
   $$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\frac{1}{2}+\mathcal{O}(x^2))}{x^2(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\mathcal{O}(x))} = -2$$ $\square$

3. Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2t}dt$. (3p)

   Lösning: $\int_0^\infty e^{-2t}dt = [-\frac{1}{2}e^{-2t}]_0^\infty = -\frac{1}{2}\cdot 0 - (-\frac{1}{2}\cdot 1) = \frac{1}{2}$. $\square$

4. Derivera $F(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2}dt$ där $x \in (1,\infty)$. (3p)

   Lösning: Antag att $a \in (\sqrt{x}, x^2)$. Då är $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2}dt = \int_{\sqrt{x}}^{a} e^{t^2}dt + \int_a^{x^2} e^{t^2}dt =$ $= \int_{\sqrt{x}}^{a} e^{t^2}dt - \int_{x^2}^{a} e^{t^2}dt$. Låt $G(y) = \int_y^a e^{t^2}dt$. Då är $F(x) = G(\sqrt{x}) - G(x^2)$ och eftersom $G'(y) = e^{t^2}$ så är $F'(x) = G'(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - G'(x^2)\cdot 2x = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^x - 2xe^{x^4}$. $\square$

5. Låt $f(x) = x^x$ med definitionsmängd $\mathcal{D}_f = (0, \infty)$. Beräkna

(a) $\lim_{x \to 0+} f(x)$. (3p)

(b) samtliga extrempunkter till f och avgör deras karaktär. (3p)

(c) $\int_1^2 \ln(f(x))\, dx$. (3p)

Lösning:

(a) $\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x \to 0+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x\to 0+} x \ln x} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1/n)}{n}} = e^{-\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{-0} = 1.$

(b) $f' = \frac{d}{dx}(e^{x \ln x}) = (1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x})e^{x \ln x} = (\ln x + 1)x^x = 0 \;\Rightarrow\; \ln x = -1 \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; x = e^{-1}$. Teckenstudium:

x	$\frac{1}{4}$	e^{-1}	1
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

Så f har ett globalt min i $x = e^{-1}$. Dock har f inget globalt max eftersom den är strängt växande då $x \to \infty$ och $f \nearrow 1$ då $x \to 0$ (se uppgift (a)) varmed $x = 0$ hade varit ett lokalt max om f varit definerad där men eftersom mängden $(0, \infty)$ är öppen så ingår gränspunkten 0 ej i definitionsmängden för f.

(c) $F(x) = \int_1^2 \ln(x^x)\, dx = \int_1^2 x \ln x\, dx \overset{P.I.}{=} [\frac{x^2}{2} \ln x]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx =$
$= [\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}]_1^2 = 2\ln 2 - 1 - \frac{1}{2} \ln 1 + \frac{1}{4} = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$ □

6. En kurva i xy-planet beskrivs av

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

där $0 \le t \le 2$. Skissa kurvan och beräkna dess längd (3p)

Lösning: Eftersom $\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t)$ och $\frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$ så är kurvlängden
$\int_0^2 \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\, dt = \int_0^2 e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2}\, dt =$
$= \int_0^2 e^t \sqrt{\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t}\, dt =$
$= \int_0^2 e^2 \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}(e^2 - e^0) = \sqrt{2}(e^2 - 1).$ □

7. Lös differentialekvationen $y' = (y-1)(y-2)$ så att $y(0) = 0$ då $y > 2$. (3p)

Lösning: $\frac{dy}{dt} = (y-1)(y-2) \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{(y-1)(y-2)} = \int dt = t + C$. Vänsterledet partialbråksuppdelas: $\frac{1}{(y-1)(y-2)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-2} = \frac{A(y-2)+B(y-1)}{(y-1)(y-2)} \;\Rightarrow\; \begin{cases} -2A - B &= 1 \\ A + B &= 0 \end{cases} \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; A = -1$, $B = 1$. Därmed är $\int \frac{dy}{(y-1)(y-2)} = -\int \frac{dy}{y-1} + \int \frac{dy}{y-2} = -\ln|y-1| + \ln|y-2| = \ln|\frac{y-2}{y-1}|$ varmed $\ln|\frac{y-2}{y-1}| = t + C \overset{y>2}{\Rightarrow} \frac{y-2}{y-1} = e^{t+C} = De^t \;\Rightarrow\; 2 - y = De^t - yDe^t \;\Rightarrow\; yDe^t - y = De^t - 2 \;\Rightarrow\; y = \frac{De^t-2}{De^t-1}$. Om man slutligen sätter in begynnelsevillkoret fås $0 = y(0) = \frac{D-2}{D-1} \;\Rightarrow\; D = 2$ varmed $y(t) = \frac{2e^t-2}{2e^t-1}$. $\square$

8. En farkosts läge är, som funktion av tiden, direkt proportionellt mot summan av dess hastighet och acceleration. Beräkna lägesfunktionen om proportionalitetskonstanten är 2 och farkostens läge är 0 och hastighet är 1 vid start. (3p)

Lösning: Låt oss beteckna lägesfunktionen med $s(t)$. Då är hastigheten $s'(t)$ och accelerationen $s''(t)$ och $s'(t) + s''(t) = 2s(t)$. Vid start är farkostens läge 0 och dess hastighet 1, vilket innebär att $s(0) = 0$ och $s'(0) = 1$. Vi får $s''(t) + s'(t) - 2s(t) = 0$ med karakteristisk ekvation $r^2 + r - 2 = 0$ som har lösningarna $r_1 = 1$ och $r_2 = -2$ varmed lösningen är $s(t) = Ae^t + Be^{-2t}$ med derivatan $s'(t) = Ae^t - 2Be^{-2t}$. Med begynnelsevillkoren får vi $0 = s(0) = A + B$, $1 = s'(0) = A - 2B \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; s(t) = \frac{1}{3}(e^t + e^{-2t})$.

$\square$