

TENTAMEN I ENVARIABELANALYS, 7.5P

Distanskurs

31 maj, 2008 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser:** 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel:** Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844)

Till uppgifterna ska *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna ska vara *utförligt* redovisade! Varje lösning ska börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: <http://www.hh.se/staff/erja> → Teaching → Matematik 1-30 → Delkurs 3: Envariabelanalys.

1. Antag att $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$. Bevisa att talföljden a_1, a_2, a_3, \dots är växande. (3p)

2. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x} - 1}$. (3p)

3. Beräkna integralerna

(a) $\int_{e^{-1}}^{e+1} \frac{dx}{x^2 - 1}$ (3p)

(b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$ (3p)

4. Bevisa att $x \geq \sin x$ för alla $x \geq 0$. (3p)

5. Man vill minimera materialåtgången vid tillverkning av kaffeburkar. Burken ska ha formen av en cylinder med lock i båda ändar och innehålla 5 dl kaffepulver. Vad blir cylinderns höjd och radie för att volymen ska vara minimal? (4p)

6. Bestäm alla asymptoter till $f(x) = xe^{-1/x}$, $x \in \mathbb{R}$. (4p)

7. Lös fullständigt begynnelsevärdesproblemet $y' + y \ln x = x^{-x}$, $y(1) = 0$, $x > 0$. (3p)

8. Bestäm alla funktioner $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ som satisfierar ekvationen

$$\int_0^{f(x)} \sin(\ln t) dt = \int_0^x f(t) dt, \quad x > 0 \quad (4p)$$

Tips: Skriv om integralekvationen som en differentialekvation.

LYCKA TILL!