Lösningar till Tentamen i Envariabelanalys, 5p

Distanskurs
15 mars, 2008 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844)

1. Bevisa att om en funktion f är kontinuerlig på ett intervall $[a, b]$, så är f integrerbar på $[a, b]$. (3p)

   Lösning: (Se s. 288–289 i *Analys i en variabel* av Persson och Böiers.) $\square$

2. Bevisa att derivatan av x^2 är $2x$. (3p)

   Lösning: $f(x) = x^2$. Ska visa att $f'(x) = 2x$.

   $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} =$$
   $$= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x. \qquad \square$$

3. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)-\sin(x^2)}{x^4}$. (3p)

   Lösning: T-utv. av $\sin x$ kring $x = 0$ är $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$. Därmed är $\sin x^2 = x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + O((x^2)^5) = x^2 - \frac{x^6}{6} + O(x^{10})$ och $\sin^2 x = (x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5))^2 = x^2 - 2x\frac{x^3}{6} + O(x^6) = x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^6)$. I en omgivning av $x = 0$ är därmed $\displaystyle\frac{\sin^2(x)-\sin(x^2)}{x^4} =$
   $$\frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^6) - (x^2 - \frac{x^6}{6} + O(x^{10}))}{x^4} = \frac{-\frac{x^4}{3} + O(x^6)}{x^4} = \frac{-\frac{1}{3} + O(x^2)}{1} \to -\frac{1}{3}. \qquad \square$$

4. Betrakta funktionen $F(x) = \displaystyle\int_{2x}^{2}\frac{dt}{\frac{t}{2}+\frac{2}{t}}$. Beräkna

   (a) $F(0)$. (3p)

   (b) alla extrempunkter till $f(x) = F'(x)$ på intervallet $[-2, 2]$. (3p)

Lösning:

(a) $F(0) = \int\limits_0^2 \frac{dt}{\frac{t}{2}+\frac{2}{t}} = \int_0^2 \frac{2t\,dt}{t^2+4} \left\{ \begin{array}{ll} u = t^2 & t=0 \leftrightarrow u=0 \\ du = 2t\,dt & t=2 \leftrightarrow u=4 \end{array} \right\} = \int_0^4 \frac{du}{u+4} = [\ln|u+4|]_0^4 = \ln 2^3 - \ln 2^2 = \ln 2.$

(b) Låt $g(t) = \frac{2t}{t^2+4}$ och $G(t) = \int g(t)\,dt$. Då är $F(x) = \int_{2x}^2 g(t)\,dt = G(2) - G(2x)$ och $f(x) = F'(x) = (G(2)-G(2x))' = 0 - 2G'(2x) = -2g(2x) = -2 \cdot \frac{2(2x)}{(2x)^2+4} = -\frac{2x}{x^2+1}$. Lokala extrempunkter fås av att $f'(x) = -\frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2} = 0$, varmed $x = \pm 1$.

Teckenstudium ger att

x	-2	-1	0	1	2
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

och $f(-2) = \frac{4}{5} < 1$ och $f(2) = -\frac{4}{5} > -1$. Därmed är $(x,y) = (-1,1)$ globalt max och $(x,y) = (1,-1)$ globalt min på intervallet $[-2,2]$. $\square$

5. Bevisa att $e^{-x} < \frac{1}{x}$ för alla $x > 0$. (3p)

Lösning: Ska visa att $e^{-x} < \frac{1}{x}$ för $x > 0$, dvs att $xe^{-x} < 1$. Låt $f(x) = xe^{-x}$. Det räcker att visa att $\max\limits_{x>0} f(x) < 1$. Vi har att $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} = 0$ då $x = 1$, och eftersom $f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{-1/2} > 0$ och $f'(2) = -e^{-2} < 0$ så är $(1, e^{-1})$ ett lokalt max för f. Eftersom $f(0) = 0$ och $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ så har vi därmed bevisat att $xe^{-x} = f(x) \le \max\limits_{x>0} f(x) = e^{-1} < 1$. $\square$

6. Beräkna $\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x\,dx$. (3p)

Lösning:

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \sin x\,dx \\ &\overset{P.I.}{=} e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx \\ &\overset{P.I.}{=} e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx \right) \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - I \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad 2I = e^x \sin x - e^x \cos x \quad \Rightarrow \quad \int e^x \sin x\,dx = I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$ varmed $\int_0^\pi e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}[e^x(\sin x - \cos x)]_0^\pi = \frac{1}{2}(e^\pi(0-(-1)) - e^0(0-1)) = \frac{1}{2}(e^\pi + 1)$. $\square$

7. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - 2y' + 5y = e^x$ där $y(0) = y'(0) = \frac{9}{4}$. (4p)

Lösning:

Kar. ekv. $r^2 - 2r + 5 = 0 \;\Rightarrow\; r = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; y_h = Ae^{(1+2i)x} + Be^{(1-2i)x}$.

Partikulärlösning: Då högerledet är e^x ansätts $y = ze^x$ varmed $y' = z'e^x + ze^x$ och $y'' = z''e^x + 2z'e^x + ze^x$ så $y'' - 2y' + 5y = (z'' + 2z' + z - 2(z' + z) + 5z)e^x = e^x$ och division i båda led med $e^x \neq 0$ ger $z'' + 4z = 1$ så partikulärlösning i hjälpekvationen är $z = \frac{1}{4}$. Därmed är $y_p = \frac{1}{4}e^x$.

Fullständig lösning: $y = Ae^{(1+2i)x} + Be^{(1-2i)x} + \frac{1}{4}e^x \;\Rightarrow\; y' = A(1+2i)e^{(1+2i)x} + B(1-2i)e^{(1-2i)x} + \frac{1}{4}e^x$. Därmed ger begynnelsevillkoren att

$\frac{9}{4} = y(0) = A + B + \frac{1}{4}$ (1)

$\frac{9}{4} = y'(0) = A(1+2i) + B(1-2i) + \frac{1}{4} = A + B + 2i(A - B) + \frac{1}{4}$ (2)

$$\left.\begin{array}{l}(1) \;\Rightarrow\; A + B = \frac{8}{4} = 2 \\ (2) - (1) : 2i(A - B) = 0 \;\Rightarrow\; A = B\end{array}\right\} \Rightarrow\; A = B = 1$$

Alltså är $y(x) = e^{(1+2i)x} + e^{(1-2i)x} + \frac{1}{4}e^x =$
$= (\cos 2x + i\sin 2x + \cos 2x - i\sin 2x + \frac{1}{4})e^x = (2\cos 2x + \frac{1}{4})e^x$. □

8. En farkost rör sig med en hastighet som är omvänt proportionell mot differensen mellan hastigheten och accelerationen. Antag att proportionalitetskonstanten är 1 och att hastigheten är större än 1.

(a) Visa att hastigheten är strängt växande. (2p)

(b) Bestäm accelerationen som funktion av tiden om den vid start är 2. (3p)

Lösning:

(a) Låt $v(t)$ beteckna farkostens hastighet som funktion av tiden. Då är accelerationen $v'(t)$ och $v = \frac{1}{v - v'}$, där $v > 1$. Vi får $v^2 - vv' = 1 \;\Rightarrow\; v^2 - 1 = vv' \;\Rightarrow\; \frac{v^2-1}{v} = v'$. Eftersom $v > 1$ är $v' = \frac{v^2-1}{v} > 0$, dvs hastigheten $v(t)$ är strängt växande.

(b) Eftersom ekvationen $\frac{dv}{dt} = \frac{v^2-1}{v}$ är separabel har vi att $\frac{v}{v^2-1} = \frac{dt}{dv} \;\Rightarrow\; \int \frac{v}{v^2-1}dv = \int dt$, där $\int \frac{v}{v^2-1}dv = \frac{1}{2}\int \frac{2v\,dv}{v^2-1} \overset{\{w=v^2\}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w-1} = \frac{1}{2}\ln|w-1| = \frac{1}{2}\ln|v^2-1|$ och $\int dt = t + C$. Därmed är $\ln|v^2 - 1| = 2t + C \overset{\{v>1\}}{\Rightarrow} v^2 = e^{2t+C} + 1 \;\Rightarrow\; v(t) = \pm\sqrt{e^{2t+C}+1}$. Då vi vet att $v > 1$ måste dock $v(t) = \sqrt{e^{2t+C}+1}$ och accelerationen är $v'(t) = \frac{e^{2t+C}}{\sqrt{e^{2t+C}+1}}$. Begynnelsevillkoret $v'(0) = 2$ ger nu att $2 = \frac{e^C}{\sqrt{e^C+1}} \;\Rightarrow\; 4(e^C+1) = e^{2C} \overset{x=e^C}{\Rightarrow} x^2 - 4x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2 \pm \sqrt{2^2+4}$ men $x = e^C > 0$ innebär att endast den positiva roten är relevant. Vi får slutligen $C = \ln(2 + \sqrt{8})$ varmed accelerationen är $v'(t) = \frac{2(1+\sqrt{2})e^{2t}}{\sqrt{2(1+\sqrt{2})e^{2t}+1}}$. □