Lösningar till Tentamen i Envariabelanalys, 7.5p

Distanskurs
31 maj, 2008 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844)

1. Antag att $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Bevisa att talföljden $a_1, a_2, a_3, \ldots$ är växande. (3p)

   Lösning: (Se s. 150–151 i *Analys i en variabel* av Persson och Böiers.) $\square$

2. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$. (3p)

   Lösning:
   Alt 1: Antingen kan man använda Taylorutveckling av e^{2x} respektive e^{3x}:
   $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\mathcal{O}(x^3)-1}{1+\frac{3x}{1!}+\frac{(3x)^2}{2!}+\mathcal{O}(x^3)-1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(2+2x+\mathcal{O}(x^2))}{x(3+\frac{9}{2}x+\mathcal{O}(x^2))} = \frac{2}{3}$,
   Alt 2: … eller så kan man använda standardgrändsvärdet $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$ med $t = 2x$ respektive $t = 3x$:
   $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}}{3x\cdot\frac{e^{3x}-1}{3x}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\lim_{2x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\lim_{3x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}} = \frac{2}{3}$. $\square$

3. Beräkna integralerna

   (a) $\displaystyle\int_{e-1}^{e+1} \frac{dx}{x^2-1}$ (3p)

   (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$ (3p)

   Lösning:

   (a) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)}$. Partialbråksuppdelning ger $\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x+(-A+B)}{x^2-1}$
   $\Rightarrow \begin{cases} A+B &= 0 \\ -A+B &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B &= 1/2 \\ A &= -1/2 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2-1} = \int (\frac{-1/2}{x+1}+\frac{1/2}{x+1})\,dx =$
   $\frac{1}{2}(-\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{x-1}) = \frac{1}{2}(-\ln|x+1|+\ln|x-1|)+C \Rightarrow \int_{e-1}^{e+1}\frac{dx}{x^2-1} =$
   $\frac{1}{2}[-\ln|x+1|+\ln|x-1|]_{e-1}^{e+1} = 1-(\ln(e+2)+\ln(e-2)) = 1-\ln(e^2-4)$.

(b) För att integrera detta uttryck kvadratkompletterar vi nämnaren så att vi får ett uttryck på formen $\frac{1}{x^2+1}$ som enklare kan integreras: $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \overset{\{u=x+\frac{1}{2}\}}{=} \int \frac{du}{\frac{3}{4}(\frac{4}{3}u^2+1)} \overset{\{v=2u/\sqrt{3}\}}{=} \frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,dv}{v^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{2(x+1/2)}{\sqrt{3}}) + C$

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\lim_{x\to\infty} \arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$ □

4. Bevisa att $x \geq \sin x$ för alla $x \geq 0$. (3p)

Lösning: Ska visa att $f(x) = x - \sin x \geq 0$. Klart att $f(0) = 0$ så det räcker att visa att f är icke-avtagande för $x > 0$. $f'(x) = 1 - \cos x$. Eftersom $\cos x \leq 1$ så är $f'(x) \geq 0$ för alla x, varmed $f(x)$ är icke-avtagande för alla reella tal. Alltså är $f(x) \geq 0$ då $x \geq 0$. □

5. Man vill minimera materialåtgången vid tillverkning av kaffeburkar. Burken ska ha formen av en cylinder med lock i båda ändar och innehålla 5 dl kaffepulver. Vad blir cylinderns höjd och radie för att volymen ska vara minimal? (4p)

Lösning: Med beteckningarna

A	burkens mantelarea
V	burkens volym
h	cylinderns höjd
r	cylinderns radie

får vi: $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$ och $V = \pi r^2 h$. Eftersom $V = 5$ (då vi lämpligen räknar i dl) kan h lösas ut och A skrivas som en funktion av r. $h = 5/(2r^2) \Rightarrow A(r) = 2\pi(\frac{5}{\pi r} + r^2)$. För att få veta minimal mantelarea deriverar vi A och kollar dess nollställen. $A'(r) = 2\pi(-\frac{5}{\pi r^2} + 2r) = 0 \Rightarrow r = (\frac{5}{2\pi})^{1/3}$ (enda reella rot). Att detta verkligen är ett *minimum* för A kollas:

r	$(\frac{5}{3\pi})^{1/3}$	$(\frac{5}{2\pi})^{1/3}$	1
A'	$2\pi(\frac{5}{3\pi})^{1/3}(-3+2)$ $-$	0	$2\pi(-\frac{5}{\pi}+2)$ $+$
A	$\searrow$	min	$\nearrow$

$r = (\frac{5}{2\pi})^{1/3} \Rightarrow h = \frac{5}{\pi r^2} = \frac{5}{\pi(\frac{5}{2\pi})^{2/3}} = (\frac{20}{\pi})^{1/3}.$

Alltså är måtten: $h = (\frac{20}{\pi})^{1/3}$ och $r = (\frac{5}{2\pi})^{1/3}$. (I själva verket är $h = 2r$.) □

6. Bestäm alla asymptoter till $f(x) = xe^{-1/x}$, $x \in \mathbb{R}$. (4p)

Lösning: Eftersom $1/x$ har en singularitet i origo börjar vi med att undersöka f kring $x = 0$: $\ln f = \ln x - \frac{1}{x} \to -\infty$ då $x \to 0+ \Rightarrow \lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, och då $x \to 0-$ har vi med subsitutionen $t = 1/x$ att $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{t\to -\infty} \frac{1}{t}e^{-t} = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}e^{t} = -\infty$. Alltså finns det en vertikal asymptot i origo. Då $x \to \pm\infty$ så går $e^{-1/x}$ mot $e^{-0} = 1$ respektive $e^0 = 1$, varmed $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ med hastigheten hos x. Vi får, denna gång med $t = -\frac{1}{x}$, att $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to-\infty} x(e^{-1/x}-1) = \lim_{t\to 0+}(-\frac{1}{t})(e^t-1) = -\lim_{t\to 0+} \frac{e^t-1}{t} = -1$. Och på liknande sätt även att $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}(e^{-t} - 1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{t}e^{-t}(1 - e^t) = -\lim_{x\to+\infty} e^{-t}\frac{e^t-1}{t} = -1$. Därmed gäller att såväl $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (x - 1)) = 0$ som $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (x - 1)) = 0$. Totalt har vi alltså kommit fram till att det finns en vertikal asymptot, $x = 0$, i origo, och en sned asymptot, $x - 1$, då $x \to \pm\infty$. $\square$

7. Lös fullständigt begynnelsevärdesproblemet $y' + y\ln x = x^{-x}$, $y(1) = 0$, $x > 0$. (3p)

Lösning: Detta är en linjär differentialekvation så vi använder metoden med "integrerande faktor" vilket ger $\int \ln x = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x\ln x - x + C$. Därmed är den integrerande faktorn $e^{x\ln x - x}$ och vi får $y'e^{x\ln x-x} + y\ln x e^{x\ln x-x} = x^{-x}e^{x\ln x-x}$. Men $x^{-x} = e^{\ln(x^{-x})} = e^{-x\ln x}$ så högerledet reduceras till e^{-x}. Integrering av båda led ger nu att $ye^{x\ln x-x} = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$. Därmed är $y = \frac{C-e^{-x}}{e^{x\ln x-x}}$. Begynnelsevillkoret ger nu värde på konstanten C: $0 = y(1) = \frac{C-e^{-1}}{e^{-1}} \Rightarrow C = e^{-1}$.
Alltså är lösningen $y(x) = \frac{e^{x-1}-1}{x^x}$, $x > 0$. $\square$

8. Bestäm alla funktioner $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ som satisfierar ekvationen

$$\int_0^{f(x)} \sin(\ln t)\, dt \;=\; \int_0^x f(t)\, dt, \quad x > 0 \qquad \text{(4p)}$$

Tips: Skriv om integralekvationen som en differentialekvation.

Lösning: Derivering av båda led ger att

$$f'(x)\sin(\ln(f(x))) \;=\; f(x)$$

dvs $\frac{df}{dx} = \frac{f}{\sin(\ln f)}$ varmed $\int \frac{\sin(\ln f)}{f}\, df = \int dx$. Med subsitutionen $u = \ln f$ får vi $du = \frac{1}{f}\, df$ så $\int \frac{\sin(\ln f)}{f}\, df = \int \sin u\, du = \cos u = \cos(\ln f)$ (sånär som på den additiva konstanten). Därmed blir ekvationen $\cos(\ln f) = x + C \Rightarrow f(x) = e^{\arccos(x+C)}$, där C är ett reellt tal. Eftersom arccos endast är definerad på intervallet $[-1, 1]$ är definitionsmängden för f: $(-1 - C, 1 - C)$. $\square$