Lösningar till Tentamen i Envariabelanalys, 5p

Distanskurs
17 mars, 2007 kl. 13.30 – 17.30

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844)

1. Bevisa medelvärdessatsen som säger att om funktionen f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) så finns ett tal $\xi \in (a, b)$ sådant att $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$.(3p)

   Lösning: (Se s. 202–203 i *Analys i en variabel* av Persson och Böiers.) □

2. Beräkna gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+n}$. (3p)

   Lösning:
   $\sqrt[n]{1+n} = e^{\frac{1}{n}\ln(1+n)}$ och eftersom $\frac{1}{n}\ln(1+n) \to 0$ så är $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+n} = e^0 = 1$. □

3. Bestäm en funktion $F(x) = \int \frac{1}{x} \ln x\, dx$ sådan att $F(e^2) = 1$. (3p)

   Lösning: Denna primitiva funktion kan man beräkna på (åtminstone) 2 sätt. Dels genom partialintegration: Låt $g = \frac{1}{x}$ och $h = \ln x$ så är $I = \int \frac{1}{x}\ln x\, dx =$ $= Gh - \int Gh' = \ln x \ln x - \int \ln x \frac{1}{x}\, dx = (\ln x)^2 - I$ varmed $2I = (\ln x)^2 + C$ och därmed har vi kommit fram till att $\int \frac{1}{x}\ln x\, dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$.
   Och dessutom genom substitution: $\left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\, dx \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{x}\ln x\, dx = \int u\, du =$ $= \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$. Om nu $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$ och $F(e^2) = 1$ så måste alltså $C = 1 - \frac{1}{2}(\ln e^2)^2 = 1 - \frac{4}{2} = -1$. Alltså är $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - 1$. □

4. Beräkna
   (a) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$ (3p)
   (b) $\int_0^1 \arctan x\, dx$ (3p)

   Lösning:

   (a) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx \left\{ \begin{array}{ll} u = \sqrt{x} & \sqrt{4} = 2 \\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \Rightarrow dx = 2u\, du & \sqrt{1} = 1 \end{array} \right\} = \int_1^2 e^u 2u\, du \overset{P.I.}{=}$
   $= [2ue^u]_1^2 - \int_1^2 2e^u du = 2[(u-1)e^u]_1^2 = 2e^2$

(b) $\int_0^1 \arctan x\,dx = \int_0^1 1\cdot\arctan x\,dx \overset{P.I.}{=} [x\arctan x]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx.$

$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx \left\{\begin{array}{c} u=x^2 \\ du = 2x\,dx \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u+1} = \frac{1}{2}\ln|u+1|+C = \frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C \ \Rightarrow$

$\int_0^1 \arctan x\,dx = [x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|]_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$ □

5. Bestäm alla lokala extempunkter för $G(x) = \int_1^{\sqrt{x^2+1}}\frac{\cos y}{y}\,dy$ då $-1\le x\le 6$. (3p)

Lösning: $G'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\cos(\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x\cos(\sqrt{x^2+1}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \cos(\sqrt{x^2+1}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \sqrt{x^2+1} = \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = \pm\sqrt{\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}-1}$ där $n\in\mathbb{Z}$. Av dessa nollställen kan endast de på intervallet $[-1,6]$ komma ifråga. Låt oss kalla $x_0 = -\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-1}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{\pi^2}{4}-1}$, $x_3 = \sqrt{\frac{(3\pi)^2}{4}-1}$, $x_4 = \sqrt{\frac{(5\pi)^2}{4}-1}$. Då gäller att $x_0 < -1$, $x_1 > -1$, $x_3 < 6$ och $x_4 > 6$ (vilket visas nedan) varmed x_1, x_2 och x_3 är samtliga nollställen till G'. Vi har att $\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-1} > \sqrt{\frac{3^2}{4}-1} = \frac{\sqrt{5}}{2} > \frac{\sqrt{4}}{2} = 1 \Rightarrow x_0 = -\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-1} < -1$. (Givetvis är $x_1 = 0 > -1$). $x_3 = \sqrt{\frac{(3\pi)^2}{4}-1} < \frac{3\pi}{2} < \frac{3\cdot 3.2}{2} < 5$. Avslutningsvis är $x_4 = \sqrt{\frac{(5\pi)^2}{4}-1} = \sqrt{\frac{25\cdot\pi^2-4}{4}} > \sqrt{\frac{25\cdot 3^2-4}{4}} = \sqrt{\frac{221}{4}} > \sqrt{55} > 7$. Därmed har vi (enl. teckenstudium) att $G(x)$ har 3 lokala extrempunkter varav 2 lokala min i $x=0$ och $x = \sqrt{(3\pi)^2/4-1}$ och ett lokalt max i $x = \sqrt{\pi^2/4-1}$. □

x	0	$\sqrt{\pi^2/4-1}$	$\sqrt{(3\pi)^2/4-1}$
$F'(x)$	$-\ \ 0\ \ +$	$+\ \ 0\ \ -$	$-\ \ 0\ \ +$
$F(x)$	$\searrow$ min $\nearrow$	$\nearrow$ max $\searrow$	$\searrow$ min $\nearrow$

6. Lös begynnelsevärdesproblemet $y''+2y'+y = xe^x$ där $y(1) = 0$ och $y'(0) = 1$. (4p)

Lösning: Kar. ekv.: $r^2+2r+1 = 0 \Rightarrow r = -1 \Rightarrow y_h = Ae^{-x}+Bxe^{-x}$.
För partikulärlösningen ansätter vi $y_p(x) = z(x)e^x$ så fås $y_p' = z'e^x+ze^x$ och $y_p'' = z''e^x+2z'e^x+ze^x$ varmed diff-ekvationen är $y_p''+2y_p'+y_p = z''e^x+4z'e^x+4ze^x = xe^x$. Division med e^x ger då att $z''+4z'+4z = x$. Här ansätts $z = \frac{1}{4}x+a$ varmed $z''+4z'+4z = 0+4\cdot\frac{1}{4}+4(\frac{1}{4}x+a) = x+1+4a = x \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$ och $y_p = \frac{1}{4}(x-1)e^x$. Därmed är den allmänna lösningen $y = y_h+y_p = (A+Bx)e^{-x}+\frac{1}{4}(x-1)e^x$. Då $y' = (-A+B-Bx)e^{-x}+\frac{1}{4}xe^x$ ger begynnelsevillkoren att $0 = y(1) = (A+B)e^{-1}+0 \Rightarrow B = -A$ och $1 = y'(0) = -A+B \Rightarrow 2B = 1 \Rightarrow (A,B) = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ varmed slutligen den fullständiga lösningen är
$y = (-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x)e^{-x}+\frac{1}{4}(x-1)e^x = \frac{1}{4}(x-1)(2e^{-x}+e^x)$. □

7. Antag att man ska tillverka leksakssnurror av cylinderstycken. Varje snurra ska ha formen av $f(x) = \sin x$, $0 \le x \le \frac{7\pi}{8}$ roterad ett varv kring x-axeln. Bevisa att mer än hälften av av cylinderstycket används till snurran om cylindern har den minsta omskrivna formen runt snurran. (4p)

Lösning: Efter att ha ritat en graf med den roterade delen av $\sin x$ har man förhoppningsvis en bild av den liggande snurran och hur cylinderstycket med radie 1 och höjd (dvs bredd) $\frac{7\pi}{8}$ blir den minsta för att omsluta snurran. Då snurrans volym ska beräknas minns vi först att $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ varmed $\int_0^{7\pi/8} \pi \sin^2 x \, dx = \int_0^{7\pi/8} \pi \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))\, dx = \frac{\pi}{2}[x - \frac{1}{2}\sin(2x)]_0^{7\pi/8} = \frac{\pi}{2}(\frac{7\pi}{8} - \frac{1}{2}\sin\frac{7\pi}{8} - 0) = \frac{7\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{7\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ är “snurrvolymen”. Cylindervolymen är tvärsnittsarean $\times$ höjden $= \pi \cdot 1^2 \cdot (\frac{7\pi}{8} - 0) = \frac{7\pi^2}{8}$. Därmed är andelen som går åt till snurran $\frac{\text{snurrvolymen}}{\text{cylindervolymen}} = (\frac{7\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}) \cdot \frac{8}{7\pi^2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{7\pi\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$.$\square$

8. Finn $a > 2$ sådant att

$$\int_{a-1}^{a} \frac{dx}{x^2 - 1} = \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} \qquad (4p)$$

Lösning:
$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})\, dx = \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C = \frac{1}{2}\ln|\frac{x-1}{x+1}|$.
$a > 2 \Rightarrow \int_{a-1}^{a} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{a-1}{a+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{a-2}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{(a-1)a}{(a+1)(a-2)}$.
$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{R\to\infty} \ln\frac{R-1}{R+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{a-1}{a+1} = \ln 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{a-1}{a+1} = -\frac{1}{2}\ln\frac{a-1}{a+1}$.
$\int_{a-1}^{a} \frac{dx}{x^2-1} = \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\frac{(a-1)a}{(a+1)(a-2)} = -\frac{1}{2}\ln\frac{a-1}{a+1} \Leftrightarrow \ln\frac{(a-1)^2 a}{(a+1)^2(a-2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2 a}{(a+1)^2(a-2)} = 1 \Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1)a = (a^2 + 2a + 1)(a - 2) \Leftrightarrow 2a^2 - 4a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \pm \sqrt{1+1}$ och eftersom $a > 2$ så är lösningen $a = 1 + \sqrt{2}$. $\square$

9. Skriv

$$\int_1^x e^{y(t)} y'(t)\, dt = \ln x \quad \text{där } x \ge 1 \text{ och } y(1) = 1$$

som ett begynnelsevärdesproblem och lös det. (3p)

Lösning: Derivering av båda led ger att $e^{y(x)}y'(x) = \frac{1}{x}$ vilket är en separabel diff-ekvation som vi löser $e^y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int e^y dy = \int \frac{1}{x}\, dx \Rightarrow e^y = \ln x + C \Rightarrow y = \ln(\ln x + C)$. Begynnelsevillkoret ger nu att $1 = y(1) = \ln(\ln 1 + C) \Rightarrow C = e \Rightarrow y(x) = \ln(e + \ln x)$. $\square$