

TENTAMEN I ENVARIABELANALYS, 5P

Distanskurs

19 augusti, 2006 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser:** 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel:** Inga.

Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844)

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna skall vara *utförligt* redovisade! Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: <http://www.hh.se/staff/erja> → Teaching → Matematik 1-20 → Delkurs 3: Envariabelanalys → 060819: lösning

1. Antag att funktionen f är kontinuerlig på $[a, b]$ och att F är dess primitiva funktion. Bevisa att $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. (3p)
2. Beräkna gränsvärdena
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3)}{\sin^3 x}$ (3p)
 - (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 1} \right)$ (3p)
3. Låt $f(x) = xe^{-1/x}$ med definitionsmängden $\mathcal{D}_f = (-\infty, 0)$. Beräkna alla
 - (a) lokala extrempunkter för f . (3p)
 - (b) asymptoter till f . (3p)
4. Beräkna $\int_0^{1/2} \frac{x dx}{1 - x^2}$. (3p)
5. Låt $F(x) = \int_{1/2}^x \frac{\ln(ay - 1)}{y + 1} dy$ där $\mathcal{D}_F = (\frac{1}{2}, \infty)$. Bestäm värdet på konstanten a så att $F(x)$ får ett minimum i $x = 1$. (3p)
6. Lös begynnelsevärdesproblemet $\frac{\ln y}{y} = \frac{\ln x}{y'}$ där $x \geq 1$, $y > 1$, $y(1) = e^2$. (3p)
7. Lös differentialekvationen $4y'' - 4y' + 17y = e^x$ så att $y(\pi) = -y'(\pi) = e^\pi$. (3p)
8. Antag att ett skepp ska frakta en last 1000 km. Kaptenen på skeppet har 94 kr/timme i lön, bränslet kostar 10 kr/liter och skeppet förbrukar $0.1x^2 + 5$ liter/timme bränsle då det färdas med hastigheten x km/timme. Med vilken hastighet blir transporten billigast? (3p)

LYCKA TILL!