Lösningar till tentamen i Envariabelanalys, 5p

Distanskurs
19 augusti, 2006 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844)

1. Antag att funktionen f är kontinuerlig på $[a, b]$ och att F är dess primitiva funktion. Bevisa att $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. (3p)

   Lösning: (Se s. 298–299 i *Analys i en variabel* av Persson och Böiers.) $\square$

2. Beräkna gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{\sin^3 x}$ (3p)

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2-2x-1}\right)$ (3p)

   Lösning:

   (a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^3}{(\sin x)^3} \overset{y=x^3}{=} \left(\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}\right)\left(\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^3\right) =$$
   $$= 1 \cdot \left(\frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}\right)^3 = 1$$

   (b) $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2-2x-1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-2x-1})(\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x-1})}{\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x-1}} =$$
   $$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1-(x^2-2x-1)}{\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(4+\frac{2}{x})}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{4}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 2$$

   $\square$

3. Låt $f(x) = xe^{-1/x}$ med definitionsmängden $\mathcal{D}_f = (-\infty, 0)$. Beräkna alla

   (a) lokala extrempunkter för f. (3p)

   (b) asymptoter till f. (3p)

   Lösning:

   (a) $f'(x) = 1 \cdot e^{-1/x} + x \cdot \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$
   $f' = 0$ då $1 + \frac{1}{x} = 0$ dvs då $x = -1$. Där är

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow 0-$
f'	$+$	0	$-$	
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\searrow$

Och eftersom $f(-1) = -e$ är den enda lokala extrempunkten ett max i $(-1, -e)$.

(b) Då $x \to -\infty$ går $e^{-1/x}$ mot e^0 så $f = xe^{-1/x}$ avtar mot en linjär funktion $y = x + a$ då $x \to -\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f - x) = \lim_{x\to-\infty}(xe^{-1/x} - x) \overset{y=-1/x}{=} -\lim\limits_{y\to 0+} \frac{e^y-1}{y} = -1 \Rightarrow 0 = \lim\limits_{x\to-\infty}(f - x) + 1 = \lim\limits_{x\to-\infty}(f - (x - 1))$. Alltså är $y = x - 1$ en sned asymptot. Vidare är $\lim\limits_{x\to 0-} xe^{-1/x} \overset{y=-1/x}{=} \lim\limits_{y\to\infty} -\frac{1}{y}e^y = -\infty$ varmed $x = 0$ är en vertikal asymptot. $\square$

4. Beräkna $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x\,dx}{1 - x^2}$. (3p)

Lösning:
$\int_0^{1/2} \frac{x\,dx}{1-x^2} = \int_0^{1/2}(\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x})\,dx = \int_0^{1/2} \frac{(A+B)+(A-B)x}{1-x^2}\,dx \left[\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{cases}\right]$
$= \int_0^{1/2} \frac{1/2}{1-x}\,dx - \int_0^{1/2} \frac{1/2}{1+x}\,dx = \frac{1}{2}\Big([-\ln|1-x|]_0^{1/2} - [\ln|1+x|]_0^{1/2}\Big) = \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln\frac{2}{3}) =$
$= \ln(\frac{4}{3})^{1/2} = \ln\frac{2}{\sqrt{3}}$. $\square$

5. Låt $F(x) = \displaystyle\int_{1/2}^{x} \frac{\ln(ay-1)}{y+1}\,dy$ där $\mathcal{D}_F = (\frac{1}{2}, \infty)$. Bestäm värdet på konstanten a så att $F(x)$ får ett minimum i $x = 1$. (3p)

Lösning: Antag att $g(y) = \frac{\ln(ay-1)}{y+1}$ och att $G(y)$ är dess primitiva funktion. Då är $F(x) = \int_{1/2}^{x} g(y)\,dy = G(x) - G(\frac{1}{2})$. Extrempunkter för funktionen F ska uppfylla villkoret $0 = F'(x) = G'(x)$. Men $G'(x) = g(x) = \frac{\ln(ax-1)}{x+1}$ och eftersom $x > 1/2$ är $G' = 0 \Leftrightarrow \ln(ax - 1) = 0$ och om extrempunkten ska vara i $x = 1$ betyder detta att $\ln(a \cdot 1 - 1) = 0$, dvs att $a = 2$. Att detta är ett minimum framgår av ett teckenstudium:

x	$\frac{3}{4}$	1	2
F'	$-$	0	$+$
F	$\searrow$	min	$\nearrow$

Nämnas bör också att integralen som definierar F är konvergent i vänstra gränsen (då $y = \frac{1}{2}$) ty $|\frac{\ln(2y-1)}{y+1}| < |\ln(2y-1)|$ och $|\int_{1/2}^{x} \ln(2y-1)\,dy| \overset{u=2y-1}{=} \frac{1}{2}|\int_0^{2x-1} \ln u\,du| = \frac{1}{2}|[u\ln u - u]_0^{2x-1}| < \infty$ för alla $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$. $\square$

6. Lös begynnelsevärdesproblemet $\dfrac{\ln y}{y} = \dfrac{\ln x}{y'}$ där $x \geq 1$, $y > 1$, $y(1) = e^2$. (3p)

Lösning: Med beteckningen $\frac{dy}{dx}$ för y' är $\frac{\ln y}{y} = \frac{dx}{dy} \cdot \ln x \Rightarrow \int \frac{\ln y}{y}\, dy = \int \ln x\, dx + C$. Vänsterledet är $I = \int \underbrace{\tfrac{1}{y}}_{f} \underbrace{\ln y}_{g}\, dy = Fg - \int Fg' = \ln y \cdot \ln y - \underbrace{\int \ln y \cdot \tfrac{1}{y}\, dy}_{=I} \Rightarrow$ $2I = (\ln y)^2 \Rightarrow \int \frac{1}{y} \ln y\, dy = \frac{1}{2}(\ln y)^2$. Högerledet är $\int \ln x\, dx = \int \underbrace{1}_{f} \cdot \underbrace{\ln x}_{g}\, dx =$ $= Fg - \int Fg' = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x\ln x - x$. Därmed är ekvationen $\frac{1}{2}(\ln y)^2 = x \ln x - x + C \Rightarrow \ln y = \sqrt{2x(\ln x - 1) + C'}$ och begynnelsevillkoret ger att $e^2 = y(1) = e^{\sqrt{2(\ln 1 - 1) + C'}} \Rightarrow C' = 6$ varmed slutligen $y(x) = e^{\sqrt{2x(\ln x - 1) + 6}}$. □

7. Lös differentialekvationen $4y'' - 4y' + 17y = e^x$ så att $y(\pi) = -y'(\pi) = e^\pi$. (3p)

Lösning:

Hom. $y'' - y' + \frac{17}{4} y = \frac{1}{4} e^x$ ger den karakteristiska ekvationen $r^2 - r + \frac{17}{4} = 0$ med lösningarna $r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{17}{4}} = \frac{1}{2} \pm 2i$ varmed $y_h = e^{x/2}(A \cos 2x + B \sin 2x)$.

Part. Ansätt $y_p = z_p e^x$. Då är $y_p' = z_p' e^x + z_p e^x$ och $y_p'' = z_p'' e^x + 2z_p' e^x + z_p e^x$ varmed $\frac{1}{4} e^x = y_p'' - y_p' + \frac{17}{4} y_p = z_p'' e^x + 2z_p' e^x + z_p e^x - (z_p' e^x + z_p e^x) + \frac{17}{4} z_p e^x$. Eftersom $e^x > 0$ ger division med e^x att $\frac{1}{4} = z_p'' + z_p' + \frac{17}{4} z_p \Rightarrow z_p = \frac{1}{17} \Rightarrow y_p = z_p e^x = \frac{1}{17} e^x$.

Fullst. $y = y_h + y_p = e^{x/2}(A \cos 2x + B \sin 2x) + \frac{1}{17} e^x \Rightarrow y' =$ $= \frac{1}{2} e^{x/2}(A \cos 2x + B \sin 2x) + e^{x/2}(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + \frac{1}{17} e^x$. Begynnelsevillkoren ger då att $e^\pi = y(\pi) = e^{\pi/2} A + \frac{1}{17} e^\pi$ och $-e^\pi = y'(\pi) =$ $= \frac{8}{17} e^\pi + \frac{1}{17} e^\pi + 2B e^{\pi/2}$ så $A = \frac{16}{17} e^{\pi/2}$ och $B = -\frac{13}{17} e^{\pi/2}$. Slutligen är därmed $y = \frac{1}{17} e^{x/2}(e^{x/2} + 16 e^\pi \cos 2x - 13 e^\pi \sin 2x)$. □

8. Antag att ett skepp ska frakta en last 1000 km. Kaptenen på skeppet har 94 kr/timme i lön, bränslet kostar 10 kr/liter och skeppet förbrukar $0.1x^2 + 5$ liter/timme bränsle då det färdas med hastigheten x km/timme (då man antar att $5 \leq x \leq 50$). Med vilken hastighet blir transporten billigast? (3p)

Lösning: Att färdas 1000 km med hastigheten x km/timme tar $1000/x$ timmar. Skeppet kostar $(0.1x^2 + 5)10$ kr/timme och sedan tar kaptenen ytterligare 94 kr/timme. Alltså blir den totala kostnaden för den 1000 km långa transporten $K(x) =$ $= \frac{1000}{x}((0.1x^2 + 5)10 + 94) = 1000x + 144000 \frac{1}{x}$. För att få reda på extrempunkter löser vi $K'(x) = 1000 - 144000 \frac{1}{x^2} = 0$ vilket ger den positiva roten $x = 12$. Således får man minimal kostnad vid hastigheten 12 km/timme. Att detta verkligen är ett minimum verifieras med ett teckenstudium. □