Lösningar till Tentamen i Envariabelanalys, 5p

Distanskurs
3 juni, 2006 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844)

1. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (3p)

   Lösning: (Se s. 294–295 i *Analys i en variabel* av Persson och Böiers.) □

2. Avgör om gränsvärdet $\lim_{x\to 2} \frac{e^{-2x+4}-1}{e^{-x+3}-e}$ existerar och beräkna det i så fall. (3p)

   Lösning:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{e^{-2x+4}-1}{e^{-x+3}-e} &= \lim_{2-x\to 0} \frac{e^{2(2-x)}-1}{e^{2-x+1}-e} \\
&\overset{u=2-x}{=} \lim_{u\to 0} \frac{e^{2u}-1}{e^{u+1}-e} \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{1}{e} \cdot \frac{(e^u)^2-1}{e^u-1} \\
&= \frac{1}{e} \lim_{u\to 0} \frac{(e^u-1)(e^u+1)}{e^u-1} \\
&= \frac{1}{e}(e^0+1) \\
&= \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

□

3. Bestäm normalen till kurvan $y = \sin(3x)$ i punkten $x = \frac{\pi}{4}$. (3p)

   Lösning: $y' = 3\cos(3x)$ så normalens riktningskoefficient i $x = \frac{\pi}{4}$ är $-\frac{1}{y'(\frac{\pi}{4})} = -\frac{1}{3\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ varmed normalens ekvation är $n(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}x + b$. Konstanten b bestäms av att kurvan $y(x)$ och normalen $n(x)$ skär varandra i punkten $x = \frac{\pi}{4}$: $\sin(3\cdot\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\pi}{4} + b = \frac{\pi}{6\sqrt{2}} + b \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{6\sqrt{2}} = \frac{6-\pi}{6\sqrt{2}}$. Alltså är normalen $n(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}x + \frac{6-\pi}{6\sqrt{2}}$. □

4. Låt $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+6x+1}$.

(a) Beräkna alla extrempunkter till f. (3p)

(b) Bestäm alla asymptoter till f. (3p)

Lösning:

(a) $f'(x) = \frac{e^x(x^2+6x+1)-e^x(2x+6)}{(x^2+6x+1)^2} = \frac{e^x(x^2+4x-5)}{(x^2+6x+1)^2} = 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{4+5} = \left\{ \begin{array}{c} -5 \\ 1 \end{array} \right.$.

Teckenstudium:

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{8}$		-5		$-3+\sqrt{8}$		1		∞
f'		$+$	odef.	$+$	0	$-$	odef.	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	odef.	$\nearrow$	$-\frac{1}{4}e^{-5}$	$\searrow$	odef.	$\searrow$	$\frac{1}{7}e$	$\nearrow$	∞

Alltså har f lokalt max i $(-5, -\frac{1}{4}e^{-5})$ och lokalt min i $(1, \frac{1}{7}e)$.
(Obs. att maximumet är mindre än minimumet! – beror på diskontinuiteten i $x = -3+\sqrt{8}$.)

(b) Faktorisering av nämnaren: $x^2+6x+1 = 0 \Rightarrow x = -3 \pm \sqrt{8} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{(x+3-\sqrt{8})(x+3+\sqrt{8})}$

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2+6x+1} = 0$ ii. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2+6x+1} = \infty$

iii. $\lim\limits_{x\to(-3+\sqrt{8})+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-3+\sqrt{8})+} \frac{e^x}{(x+3-\sqrt{8})(x+3+\sqrt{8})} \overset{\{t=x+3-\sqrt{8}\}}{=} \frac{e^{-3+\sqrt{8}}}{2\sqrt{8}} \lim\limits_{t\to0+} \frac{1}{t} = +\infty$

iv. $\lim\limits_{x\to(-3+\sqrt{8})-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-3+\sqrt{8})-} \frac{e^x}{(x+3-\sqrt{8})(x+3+\sqrt{8})} \overset{\{t=x+3-\sqrt{8}\}}{=} \frac{e^{-3+\sqrt{8}}}{2\sqrt{8}} \lim\limits_{t\to0-} \frac{1}{t} = -\infty$

På liknande sätt som i iii. och iv. är

v. $\lim\limits_{x\to(-3-\sqrt{8})+} f(x) = -\infty$ vi. $\lim\limits_{x\to(-3-\sqrt{8})-} f(x) = +\infty$

i. $\Rightarrow$ $\underline{y=0 \text{ är vågrät asymptot}}$ då $x \to -\infty$.
iii, iv $\Rightarrow$ $\underline{x = -3+\sqrt{8} \text{ är vertikal asymptot}}$ då $x \to -3+\sqrt{8}$.
v, vi $\Rightarrow$ $\underline{x = -3-\sqrt{8} \text{ är vertikal asymptot}}$ då $x \to -3-\sqrt{8}$.
ii. utesluter inte att f skulle kunna ha en sned asymptot men det gör
$f(x) - (ax+b) = \frac{\frac{e^x}{x^4} - \frac{(ax+b)(x^2+6x+1)}{x^4}}{\frac{x^2+6x+1}{x^4}} \to \infty$ då $x \to \infty$ för alla $a, b \in \mathbb{R}$. □

5. Bestäm $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ så att $F(0) = \pi$. (3p)

Lösning: $F(x) = \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \left\{ \begin{array}{c} u = e^x \Leftrightarrow x = \ln u \\ du = e^x dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{u}\,du \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{1}{u}\,du}{u+\frac{1}{u}} = \int \frac{du}{u^2+1} =$
$= \arctan u + C = \arctan e^x + C$ där C ska uppfylla villkoret att $\pi = F(0) =$
$= \arctan e^0 + C = \arctan 1 + C$. Eftersom $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ är $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ varmed $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Därför är $C = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Alltså är $F(x) = \arctan e^x + \frac{3\pi}{4}$. □

6. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$. (3p)

Lösning: $\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^\infty (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})\,dx = [\ln x - \ln(x+1)]_1^\infty = [\ln\frac{x}{x+1}]_1^\infty =$
$= [\ln(1-\frac{1}{x+1})]_1^\infty = \lim\limits_{R\to\infty} (\ln(1-\frac{1}{R+1}) - \ln\frac{1}{2}) = \ln 2$. □

7. Lös differentialekvationen $xy' = y(y-2)$ då $x > 0$, $y > 2$ och $y(2) = 4$. (3p)

Lösning: $x\frac{dy}{dx} = y(y-2)$ så $\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{y(y-2)}\,dy$ varmed $\ln|x| = \int \frac{dy}{y(y-2)} =$
$= \int(\frac{A}{y} + \frac{B}{y-2})\,dy \quad \left\{ \begin{array}{l} A(y-2)+By = (A+B)y - 2A = 1 \\ \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = -A = \frac{1}{2} \end{array} \right\} = \int(-\frac{1}{2y} + \frac{1}{2(y-2)})\,dy =$
$= -\frac{1}{2}\ln|2y| + \frac{1}{2}\ln|2y-4| + C = \frac{1}{2}\ln|\frac{2y-4}{2y}| + C = \frac{1}{2}\ln|1-\frac{2}{y}| + C.$ $y(2) = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow \ln 2 = \frac{1}{2}\ln|1-\frac{1}{2}| + C \Rightarrow C = \frac{3}{2}\ln 2 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}\ln|2^3(1-\frac{2}{y})| \overset{y>2}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow x = \sqrt{8(1-\frac{2}{y})} \Rightarrow \frac{x^2}{8} = 1 - \frac{2}{y} \Rightarrow y = \frac{2}{1-\frac{x^2}{8}} = \frac{16}{8-x^2}.$ □

8. Lös differentialekvationen $y'' + 4y' - 5y = e^{2x}$ där $y(0) = \frac{22}{7}$ och $y'(0) = \frac{2}{7}$. (3p)

Lösning: Kar. ekv.: $r^2 + 4r - 5 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -5 \Rightarrow y_h = Ae^x + Be^{-5x}$. Partikulärlösning: Ansätt $y = ae^{2x}$. Då är $y_p' = 2ae^{2x}$ och $y_p'' = 4ae^{2x}$ varmed differentialekvationen är $4ae^{2x} + 4 \cdot 2ae^{2x} - 5 \cdot ae^{2x} = e^{2x} \overset{e^{2x}>0}{\Rightarrow} 4a + 8a - 5a = 1$ $\Rightarrow a = \frac{1}{7}$. Därmed är den allmänna lösningen $y = y_h + y_p = Ae^x + Be^{-5x} + \frac{1}{7}e^{2x}$ med förstaderivatan $y' = Ae^x - 5Be^{-5x} + \frac{2}{7}e^{2x}$. Begynnelsevillkoren ger nu att $\frac{22}{7} = y(0) = A + B + \frac{1}{7}$ och $\frac{2}{7} = A - 5B + \frac{2}{7}$, dvs $A + B = 3$ och $A - 5B = 0$, dvs $A = \frac{5}{2}$ och $B = \frac{1}{2}$. Alltså är den fullständiga lösningen $y = \frac{5}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-5x} + \frac{1}{7}e^{2x}$. □

9. Bestäm de reella tal x som satisfierar ekvationen

$$\sqrt{x+1} + \int_2^{\sqrt{x+1}} \frac{1+t}{1-t}\,dt = 0 \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: Endast $x \geq -1$ kan komma ifråga ty annars är ej $\sqrt{x+1}$ definierat. Faktum är att $x > 0$ ty annars är $\sqrt{x+1} \leq 1$ och då integrerar man över en singularitet i $t = 1$ som gör integralen divergent. Alltså får vi för $x \in (0, \infty)$ att $\int_2^{\sqrt{x+1}} \frac{1+t}{1-t}\,dt = -\int_2^{\sqrt{x+1}} \frac{-(1-t)+2}{1-t}\,dt = \int_2^{\sqrt{x+1}}(-1 + \frac{2}{1-t})\,dt = [-t - 2\ln|1-t|]_2^{\sqrt{x+1}} =$ $= -\sqrt{x+1} - 2\ln|1-\sqrt{x+1}| + 2$. Emellertid har vi att $x > 0$ och därmed att $\sqrt{x+1} > 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} + \int_2^{\sqrt{x+1}} \frac{1+t}{1-t}\,dt = -2\ln(\sqrt{x+1}-1) + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 1 =$ $e \Rightarrow x = (e+1)^2 - 1 = e(e+2) \in (0, \infty)$ (ok) Alltså är den enda lösningen $x = e(e+2)$. □