Lösningar till Tentamen i Envariabelanalys, 5p

Distanskurs
18 mars, 2006 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 070-306 95 89)

1. Bevisa att uttrycket $(1+\frac{1}{n})^n$ är uppåt begränsat då $n \to \infty$. (3p)

   Lösning: (Se s. 150–151 i Analys i en variabel av Persson och Böiers.) $\square$

2. Bestäm funktionerna $F(x)$ och $G(x)$ så att
   (a) $F(x) = \int \tan x \, dx$ och $F(\pi) = 1$. (3p)
   (b) $G(x) = \int \arctan x \, dx$ och $G(1) = \pi$. (3p)

   Lösning:

   (a) $F(x) = \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \end{array} \right\} = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C = \ln \frac{1}{|\cos x|} + C \;\Rightarrow\; 1 = F(\pi) = \ln \frac{1}{|-1|} + C \;\Rightarrow\; C = 1 \;\Rightarrow\; F(x) = \ln \frac{1}{|\cos x|} + 1$.

   (b) $G(x) = \int \underbrace{1}_{f} \cdot \underbrace{\arctan x}_{g} \, dx = Fg - \int Fg' = x \arctan x - \underbrace{\int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx}_{I}$

   $I = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 1+x^2 \\ du = 2x \, dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| \;\Rightarrow\; G(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$. $\pi = G(1) = 1 \cdot \arctan 1 - \frac{1}{2} \ln|1+1^2| + C = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 + C \;\Rightarrow\; C = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \;\Rightarrow\; G(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.

   $\square$

3. Beräkna gränsvärdena
   (a) $\lim_{t \to \infty} t \sin \frac{1}{2t}$ (3p)
   (b) $\lim_{x \to 1/2} \dfrac{\cos^2(\pi x)}{(x - \frac{1}{2}) \ln(2x)}$ (3p)

Lösning:

(a) $\lim\limits_{t\to\infty} t\sin\frac{1}{2t} \quad \left\{ \begin{array}{l} t=\frac{s}{2} \Rightarrow s=2t \\ t\to\infty \Rightarrow s\to\infty \end{array} \right\} \quad = \quad \lim\limits_{s\to\infty} \frac{s}{2}\sin\frac{1}{s} \quad \left\{ \begin{array}{l} u=\frac{1}{s} \Rightarrow s=\frac{1}{u} \\ s\to\infty \Rightarrow u\to 0+ \end{array} \right\} \quad =$
$\frac{1}{2}\lim\limits_{u\to 0}\frac{1}{u}\sin u = \frac{1}{2}$.

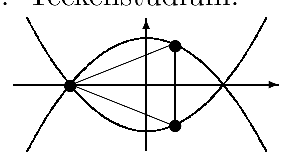
(b) $\lim\limits_{x\to 1/2} \frac{\cos^2(\pi x)}{(x-\frac{1}{2})\ln(2x)} \quad \left\{ \begin{array}{l} y=x-\frac{1}{2} \Rightarrow x=y+\frac{1}{2} \\ x\to\frac{1}{2} \Rightarrow y\to 0 \end{array} \right\} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{\cos^2(\pi(y+\frac{1}{2}))}{y\ln(2(y+\frac{1}{2}))} \quad \left\{ \begin{array}{l} y=\frac{w}{2} \Rightarrow w=2y \\ y\to 0 \Rightarrow w\to 0 \end{array} \right\} =$
$\lim\limits_{w\to 0}\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}w+\frac{1}{2})}{\frac{w}{2}\ln(w+1))}$. T-utv. av $\cos^2(\frac{\pi}{2}w+\frac{1}{2})$ och $\ln(w+1)$ kring $w=0$:
$\cos(\frac{\pi}{2}w+\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}w+\mathcal{O}(w^2) \Rightarrow \cos^2(\frac{\pi}{2}w+\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}w^2+\mathcal{O}(w^3)$ och
$\ln(w+1) = w+\mathcal{O}(w^2)$ varmed $\lim\limits_{w\to 0}\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}w+\frac{1}{2})}{\frac{w}{2}\ln(w+1))} = 2\lim\limits_{w\to 0}\frac{\frac{\pi^2}{4}w^2+\mathcal{O}(w^3)}{w^2+\mathcal{O}(w^3)} = 2\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{2}$.

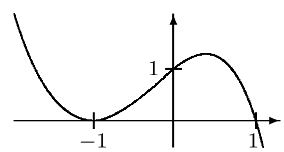
□

4. En likbent triangel har ett hörn i punkten $(-1,0)$, ett hörn på kurvan $y=1-x^2$ och ett hörn på $y=-1+x^2$ där $|x|\le 1$. Vilken är triangelns maximala area? (3p)

Lösning: $A(x) = \frac{\text{basen}\cdot\text{höjden}}{2} = \frac{(1-x^2-(-1+x^2))(1+x)}{2} = 1-x^2+x-x^3$.
$A'(x) = 1-2x-3x^2 = 0 \Rightarrow x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}$,
dvs $x_1=\frac{1}{3}$ och $x_2=-1$. Maximum? Teckenstudium:

x	-2	-1	0	$\frac{1}{3}$	1
A'	-7	0	$+1$	0	-4
A	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$





Eftersom $-1\le x\le 1$ är därmed den maximala triangelarean är $\frac{32}{27}$. □

5. Beräkna längden av kurvan $f(x)=\sqrt{x}$ mellan $x=0$ och $x=1$. (4p)

Lösning: $(f'(x))^2 = (\frac{1}{2\sqrt{x}})^2 = \frac{1}{4x} \Rightarrow$ Kurvlängden $= \int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$
$\int\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u=\sqrt{1+\frac{1}{4x}} \Rightarrow \frac{1}{4x^2} = 4(u^2-1)^2 \\ du=\frac{-1/(4x^2)}{2\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}\,dx \Rightarrow dx=-\frac{2u}{4(u^2-1)^2}\,du \end{array} \right\} = \int\frac{-u^2/2}{(u^2-1)^2}\,du = -\frac{1}{2}\int(\frac{1/2}{u+1}+\frac{1/2}{u-1})^2du$
$= -\frac{1}{8}\int(\frac{1}{(u+1)^2}+\frac{2}{u^2-1}+\frac{1}{(u-1)^2})du = -\frac{1}{8}(-\frac{1}{u+1}+\int(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1})du-\frac{1}{u-1})$
$= \frac{1}{8}(\frac{1}{u+1}+\frac{1}{u-1}+\ln|u+1|-\ln|u-1|) = \frac{1}{8}(\frac{2u}{u^2-1}+\ln|\frac{u+1}{u-1}|) = \frac{1}{8}\left(\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}{1+\frac{1}{4x}-1}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-1}\right|\right)$
$= \frac{1}{8}\left(8x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}+\ln\left|\frac{(\sqrt{1+\frac{1}{4x}}+1)^2}{1+\frac{1}{4x}-1}\right|\right) = \sqrt{x^2+\frac{x}{4}}+\frac{1}{8}\ln|1+8(x+\sqrt{x^2+\frac{x}{4}})|$.
$\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx = \sqrt{1+\frac{1}{4}}+\frac{1}{8}\ln|1+8(1+\sqrt{1+\frac{1}{4}})|-0-\frac{1}{8}\ln 1 = \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{8}\ln(9+4\sqrt{5})$.

□

6. Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = x^2y + y + x^2 + 1$ där $y(0) = 1$ och $y > -1$.(4p)

Lösning:

Alt. 1: $y' = x^2y + y + x^2 + 1 = (x^2+1)(y+1)$
$\frac{1}{y+1}\frac{dy}{dx} = x^2 + 1$ (separabel!)
$\int \frac{1}{y+1}\,dy = \int (x^2+1)\,dx$
$\ln|y+1| = \frac{x^3}{3} + x + C'$
$y = Ce^{x^3/3+x} - 1$
$1 = y(0) = Ce^0 - 1 \;\Rightarrow\; C = 2 \;\Rightarrow \underline{y = 2e^{x^3/3+x} - 1}.$

Alt. 2: $y' - (x^2+1)y = x^2 + 1$ (linjär!)
$y'e^{-x^3/3-x} + (-x^2-1)e^{-x^3/3-x}y = x^2 + 1$
$ye^{-x^3/3-x} = \int (x^2+1)e^{-x^3/3-x}dx = -e^{-x^3/3-x} + C$
$\Rightarrow\; y = -1 + Ce^{x^3/3+x}$
$y(0) = 1 \overset{\text{p.s.s.s. ovan}}{\Longrightarrow} \underline{y = 2e^{x^3/3+x} - 1}.$

$\square$

7. I en farfarsklocka sitter en pendel som är 1 m lång. Rörelseekvationen för pendeln är approximativt

$$\alpha''(t) + g\,\alpha(t) = 0$$

då utslagsvinkeln $\alpha(t)$ är liten, där g är tyngdaccelerationen i m/s^2. Bestäm pendelns utslagsvinkel efter 1 sekund om pendeln vid startögonblicket har utslagsvinkeln $\frac{\pi}{500}$ och hastighet $0\,m/s$. (4p)

Lösning:
$\alpha'' + g\alpha = 0$
Karakteristisk ekvation: $r^2 + g = 0 \;\Rightarrow\; r = \pm i\sqrt{g} \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; \alpha(t) = A\cos(\sqrt{g}\,t) + B\sin(\sqrt{g}\,t)$
$\frac{\pi}{500} = \alpha(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = A$
$\alpha'(t) = -A\sqrt{g}\,\sin(\sqrt{g}\,t) + B\sqrt{g}\,\cos(\sqrt{g}\,t)$
$0 = \alpha'(0) = 0 + B\sqrt{g} \;\Rightarrow\; B = 0$
Alltså är $\alpha(t) = \frac{\pi}{500}\cos(\sqrt{g}\,t)$ varmed pendelns läge efter
en sekund är $\alpha(1) = \frac{\pi}{500}\cos(\sqrt{g})$.

$\square$