Lösningar till tentamen i Introduktionskurs i Matematik

Distanskurs
27 oktober, 2002 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 18p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 070-306 95 89).

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna skall vara *utförligt* redovisade!
Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad.
Lösningar kommer finnas på internet:
`http://www.hh.se/staff/erja` → `teaching` → `matematik,distanskurs` → `moment 1,algebra`

1. Bevisa att om p är ett primtal som delar produkten ab, så delar p antingen a eller b.(3p)

   Lösning: (Se Diskret matematik av Bergström, Sats 2.7, s. 22.) □

2. Bevisa att om $a > 1$ och $\alpha > 0$ så $a^x/x^\alpha \to \infty$ då $x \to \infty$. (3p)

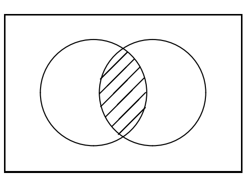
   Lösning: (Se Analys i en variabel av Persson & Böiers, Sats 8, s. .) □

3. Vilka påståenden är sanna? Motivera med Venndiagram eller sanningsvärdestabell.
   $P_1 : A \cap B \subseteq A \cup B$ $\quad P_2 : A^C \cup A = \emptyset$
   $P_3 : (A \cup B)^C \cup (A \cap B) = ((A^C \cup B^C) \cap (A \cup B))^C$ (3p)

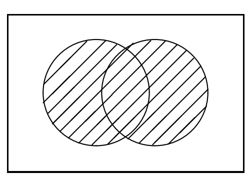
   Lösning:
   $\underline{P_1 \text{ och } P_3 \text{ är sanna}}$.

   Motivering med Venndiagram:

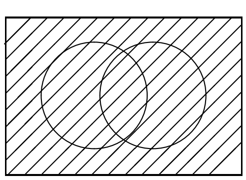
   $P_1 :$ $A \cap B$

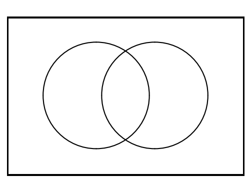
   $A \cup B$

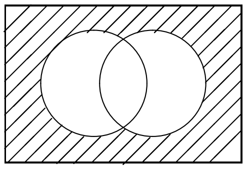
   $P_2 :$ $A \cup A^C$

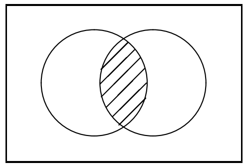
   $\emptyset$

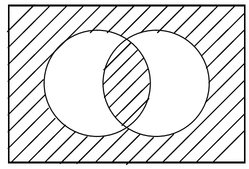
$P_3:$ $(A \cup B)^C$



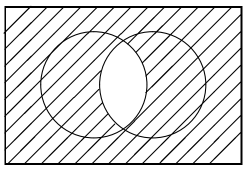
$A \cap B$



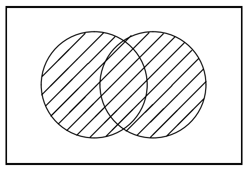
$(A \cup B)^C \cup (A \cup B)$



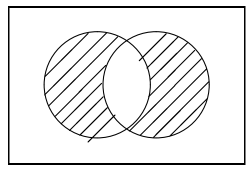
$A^C \cup B^C$



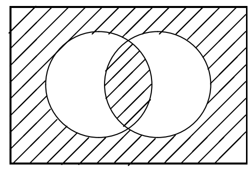
$A \cup B$



$(A \cup B^C) \cap (A \cup B)$



$((A \cup B^C) \cap (A \cup B))^C$



Motivering med motsvarande logisk utsaga:

Mängd-operator	Motsvarande logisk operator
$\cap$	$\wedge$
$\cup$	$\vee$
$\subseteq$	$\Rightarrow$
$=$	$\Leftrightarrow$
C	$\neg$

$P_1:$ Sanningsvärdestabell:

A	$\wedge$	B	$\Rightarrow$	A	$\vee$	B
S	S	S	$\boldsymbol{S}$	S	S	S
F	F	S	$\boldsymbol{S}$	F	S	S
S	F	F	$\boldsymbol{S}$	S	S	F
F	F	F	$\boldsymbol{S}$	F	F	F

Således är utsagan en **tautologi**.

$P_2:$ Sanningsvärdestabell:

A	$\vee$	$\neg A$	$\Leftrightarrow$	F_0
S	S	F	$\boldsymbol{F}$	F
F	S	S	$\boldsymbol{F}$	F

(Motexempel: Låt $A = \{1\}$ och $\mathcal{U} = \{1, 2\}$.
Då är $A \cap A^C = \{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \neq \emptyset$.)
Således är utsagan en **kontradiktion**.)

$P_3:$ Förenkling av utsagan:
Motsvarande logisk utsaga är
$\neg(A \vee B) \vee (A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; \neg((\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B))$.
Inflyttning av negationen ger
V.L. $\Leftrightarrow\; (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$
H.L. $\Leftrightarrow\; \neg(\neg A \vee \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \;\Leftrightarrow\; (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.
Således är utsagan en **tautologi.** $\square$

4. Lös fullständigt ekvationen $z^4 = -64\, i\, z$. (3p)

Lösning:
Uppenbarligen är $z = 0$ en rot. Faktorisering av denna lämnar
$z^3 = -64\, i$ som återstår att lösa.

Eftersom $-64i = 64(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$ så har vi med $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ att

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 64\Big(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\Big)$$

varmed $r = 64^{1/3} = 4$ och $3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ så $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\, n$.

Därmed är de övriga 3 rötterna $z = 4(\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\, n) + i\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\, n)) =$

$$= \begin{cases} 4(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) \\ 4(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) \\ 4(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) \end{cases} = \begin{cases} 4i \\ -\frac{4\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{2}\, i \\ \frac{4\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{2}\, i \end{cases} = \begin{cases} 4i \\ -2\sqrt{3} - 2i \\ 2\sqrt{3} - 2i \end{cases}$$

Rötterna är $\underline{z_1 = 0,\ z_2 = 4i,\ z_3 = -2\sqrt{3} - 2i,\ z_4 = 2\sqrt{3} - 2i}$. $\square$

5. Låt $0^0 := 1$ och $\sum_{k=0}^{-n} c_k := \sum_{k=-n}^{0} c_k$. För $a \in (0,2)$, visa att
   (a) $\sum_{k=0}^{n} a(1-a)^k = 1 - (1-a)^{n+1}$ för alla heltal $n \geq 0$. (2p)
   (b) $\sum_{k=0}^{n} a(1-a)^k = (1-a)^n - 1 + a$ för alla heltal $n \leq 0$. (2p)

Lösning:

(a) Induktion:
Basfall $n = 0$: $a = \sum_{k=0}^{0} a(1-a)^k = 1 - (1-a)^{0+1} = a$, ok.
Induktionsantagande n: Antag $\sum_{k=0}^{n} a(1-a)^k = 1 - (1-a)^{n+1}$.
Induktionssteg $n+1$: Visa $\sum_{k=0}^{n+1} a(1-a)^k = 1 - (1-a)^{n+2}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} a(1-a)^k &= \sum_{k=0}^{n} a(1-a)^k + a(1-a)^{n+1} \\ &= 1 - (1-a)^{n+1} + a(1-a)^{n+1} \\ &= 1 + (1-a)^{n+1}(-1+a) \\ &= 1 + (1-a)^{n+1}(-1)(1-a) \\ &= 1 - (1-a)^{n+2}. \end{aligned}$$

(b) Induktion:
Basfall $n = 0$: $a = \sum_{k=0}^{0} a(1-a)^k = (1-a)^0 - 1 + a = a$, ok.
Låt $n = -m$, så är $n \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$.
Induktionsantagande $-m$: Antag $\sum_{k=0}^{-m} a(1-a)^k = (1-a)^{-m} - 1 + a$.
Induktionssteg $-m-1$: Visa $\sum_{k=0}^{-m-1} a(1-a)^k = (1-a)^{-m-1} - 1 + a$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{-m-1} a(1-a)^k &= \sum_{k=0}^{-m} a(1-a)^k + a(1-a)^{-m-1} \\
&= (1-a)^{-m} - 1 + a + a(1-a)^{-m-1} \\
&= (1-a)^{-m}\Big(1 + \frac{a}{1-a}\Big) - 1 + a \\
&= (1-a)^{-m}\Big(\frac{1}{1-a}\Big) - 1 + a \\
&= (1-a)^{-m-1} - 1 + a\,. \qquad \square
\end{aligned}
$$

6. Ekvationen $5x^3 - 13x^2 + 37x + 91 = 0$ har en rationell rot. Finn samtliga rötter. (3p)

Lösning:
Enligt sats om samband mellan koefficienter och rationella rötter gäller
$x = \frac{p}{q} \;\Rightarrow\; p|91 \,\wedge\, q|5$, dvs $p \in \{\pm 1, \pm 7, \pm 13, \pm 91\},\; q \in \{\pm 1, \pm 5\}$
$\Rightarrow$ kandidater: $\pm 1,\ \pm\frac{1}{5},\ \pm 7,\ \pm\frac{7}{5},\ \pm 13,\ \pm\frac{13}{5},\ \pm 91,\ \pm\frac{91}{5}$.

Instättning ger:

$$
\begin{aligned}
x = 1 &: \quad 5 - 13 + 37 + 91 > 0 \\
x = -1 &: \quad -5 - 13 - 37 + 91 = 36 > 0 \\
x = \tfrac{1}{5} &: \quad \tfrac{1}{25} - \tfrac{13}{25} + \tfrac{37}{5} + 91 > 0 \\
x = -\tfrac{1}{5} &: \quad -\tfrac{1}{25} - \tfrac{13}{25} - \tfrac{37}{5} + 91 > 0 \\
x = 7 &: \quad 1715 - 637 + 259 + 91 > 0 \\
x = -7 &: \quad -1715 - 637 - 259 + 91 < 0 \\
x = \tfrac{7}{5} &: \quad \tfrac{1715}{125} - \tfrac{637}{25} + \tfrac{259}{5} + 91 > 0 \\
x = -\tfrac{7}{5} &: \quad \boxed{-\tfrac{1715}{125} - \tfrac{637}{25} - \tfrac{259}{5} + 91 = 0}
\end{aligned}
$$

$x_1 = -\frac{7}{5}$ är en rot! Faktorisering ger
$5x^3 - 13x^2 + 37x + 91 = (x + \frac{7}{5})(5x^2 + Ax + B) = 5x^3 + (\frac{7}{5}\cdot 5 + A)x^2 + (\frac{7}{5}A + B)x + \frac{7}{5}B$

vilket innebär ekvationssystemet $\begin{cases} 7 + A = -13 & \Rightarrow\ A = -20 \\ \frac{7}{5}A + B = 37 & \text{(kontroll) OK!} \\ \frac{7}{5}B = 91 & \Rightarrow\ B = 65 \end{cases}$

Varmed ekvationen är $(x + \frac{7}{5})(5x^2 - 20x + 65) = 0$ vilket även kan skrivas $(5x + 7)(x^2 - 4x + 13) = 0$ varmed de återstående 2 lösningarna fås genom att lösa $x^2 - 4x + 13 = 0$: $\quad x = \frac{4}{2} \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i$

Rötterna är $\underline{x_1 = -\frac{7}{5},\ x_2 = 2 - 3i,\ x_3 = 2 + 3i}$. $\square$

7. Hur många gånger per år kan en dag med datum 13 vara en fredag
   (a) om det inte är skottår? (2p)
   (b) om det är skottår? (2p)

Lösning:

(a) Låt oss börja med att räkna upp antalet dagar i årets månader, därefter räkna upp den trettondes dagsnummer för varje månad, för att slutligen räkna modulo 7 och se vilken rest som dyker upp flest gånger.

Månad	Jan	Feb	Mar	Apr	Maj	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dec
Dagar	31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31
13:s nummer	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
Här kan man kontrollräkna: 365-(31-13)=347.												
Rest (mod 7)	6	**2**	**2**	5	0	3	5	1	4	6	**2**	4

Alltså kan det vara fredag den 13:e $\underline{\text{3 gånger}}$ ett icke-skottår.

(b) Samma räkning fast resterna fr.o.m. Mars +1 (mod 7).

Månad	Jan	Feb	Mar	Apr	Maj	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dec
Dagar	31	29	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31
13:s nummer	13	44	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
Här blir kontrollen: 366-(31-13)=348.												
Rest (mod 7)	**6**	2	3	**6**	1	4	**6**	2	5	0	3	5

Alltså kan det vara fredag den 13:e $\underline{\text{3 gånger}}$ även ett skottår. $\square$

8. Lös kongruensekvationen $13x^7 + 11x^4 - 3 \equiv 7 \pmod 5$. (3p)

Lösning:

Låt os skriva om ekvationen som $13x^7 + 11x^4 \equiv 0 \pmod 5$.
Eftersom vi räknar modulo 5 behöver vi bara kontrollera $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$:

$$\begin{aligned}
-2:&\quad (-2)^{3\cdot 2}(-2) = 64\cdot(-2) \equiv -8 \equiv 2,\ 13\cdot 2 \equiv 1,\ (-2)^4 \equiv 1,\ 1\cdot 11 \equiv 1,\ 1+1 \not\equiv 0\\
-1:&\quad -13+11 \equiv 3 \not\equiv 0\\
0:&\quad 0 \equiv 0\\
1:&\quad 13+11 \equiv 4 \not\equiv 0\\
2:&\quad 2^{3\cdot 2}2 \equiv 3,\ 13\cdot 3 = 39 \equiv 4,\ 2^4 \equiv 1,\ 1\cdot 11 \equiv 1,\ 4+1 \equiv 0
\end{aligned}$$

Alltså är lösningsmängden $\underline{\{x : x = 5n \text{ eller } x = 5n+2 \text{ där } n \in \mathbb{Z}\}} =$
$= \{\ldots, -10, -8, -5, -3, 0, 2, 5, 7, 10, \ldots\}$. $\square$

9. Arne ska åka till skolan varje morgon. Med lika stor sannolikhet inträffar A, B, C, D eller E där A : Arne får sittplats på bussen, B : Arne får ståplats på bussen, C : Arne får skjuts av en kompis, D : Arne cyklar, E : Arne tar taxi. Hur många dagar måste man räkna med för att sannolikheten att Arne tagit bussen *minst* 2 dagar ska bli större än 1/2? (4p)

   (Tips: Sannolikheten för en händelse beräknas som antalet sätt händelsen kan inträffa på dividerat med det totala antalet sätt.)

Lösning:
Antag att Arne behöver åka in till skolan n gånger.
Han kan då ta bussen exakt 2 av de n dagarna på
$\binom{n}{2} 2^2 3^{n-2}$ sätt.
Det antal sätt han kan ta bussen *minst* 2 av de n dagarna är
$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k}$.
Enligt binomialsatsen är $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} = (2+3)^n = 5^n$ varmed

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} - \binom{n}{0} 2^0 3^n - \binom{n}{1} 2^1 3^{n-1} \\ &= 5^n - 1 \cdot 1 \cdot 3^n - n \cdot 2 \cdot 3^{n-1} \\ &= 5^n - 3^n - 2n3^{n-1}\end{aligned}$$

Det totala antalet dagar han kan ta bussen under n dagar är naturligtvis
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} = 5^n$.
Därmed är sannolikheten att han tar bussen minst 2 dagar av de n dagarna:
$\dfrac{5^n - 3^n - 2n3^{n-1}}{5^n}$ dvs för några värden på n:

n	Sannolikhet
1	$\dfrac{5-3-2}{5} = 0 < \frac{1}{2}$
2	$\dfrac{25-9-12}{25} = \frac{4}{25} < \frac{1}{2}$
3	$\dfrac{125-27-54}{125} = \frac{44}{125} < \frac{1}{2}$
4	$\dfrac{625-81-216}{625} = \frac{328}{625} > \frac{1}{2}$

Alltså måste han åka till skolan <u>minst 4 dagar</u>
för att sannolikheten ska vara större än 1/2. □