Lösningar till Tentamen i Introduktionskurs i Matematik, 5p

Distanskurs
10 januari, 2004 kl. 9.00–13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 070-306 95 89).

1. Formulera och bevisa triangelolikheten för reella tal. (3p)

   Lösning: (Se Analys i en variabel av Persson & Böiers, Sats 1, s. .) □

2. Formulera och bevisa satsen om sambandet mellan reella polynom och konjugerande nollställen. (3p)

   Lösning: (Se Analys i en variabel av Persson & Böiers, Sats 10, s. 465.) □

3. Vilka av följande påståenden är sanna?
   För att motivera "sann": bevisa. För att motivera "ej sann": ge ett motexempel.
   (a) $A \cap B^C \subseteq A \setminus B$ (1p)
   (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cap C$ (1p)
   (c) $A \cup B \subseteq A^C \cap B^C$ (1p)
   (d) $\{3n+1 : n \in \mathbb{Z}\} = \{(k+1)^2 : k \in \mathbb{Z}\}$ (1p)
   (e) $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$ (1p)

   Lösning:
   (a) Sann. Tag $c \in A \cap B^C$. Då gäller $c \in A$ och $c \notin B$. Dvs $c \in$ (A förutom de element som A har gemensamt med B). Dvs $c \in A \setminus B$.
   (b) Falsk. Motexempel: låt $A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{2, 3\}$.
   Då är $A \cap (B \cup C) = \{1\} \neq \emptyset = (A \cap B) \cap C$.
   (c) Falsk. Motexempel: låt $\mathcal{U} = \{1, 2\}, A = \{1\}, B = \emptyset$.
   Då gäller att $1 \in A \cup B = \{1\}$ men $1 \notin A^C \cap B^C = \{2\}$.
   (d) Falsk. Motexempel:
   $7 = 3 \cdot 2 + 1$ så $7 \in \{3n+1 : n \in \mathbb{Z}\}$. Men 7 är ingen "jämn kvadrat" så 7 kan ej ingå i $\{(k+1)^2 : k \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$.
   (e) Sann. Allmänt gäller att $\mathcal{P}(\{A, B\}) = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{A, B\}\}$. Med $A = \emptyset$ och $B = \{\emptyset\}$ får vi att $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ där tydligen $\{\emptyset\}$ ingår!.

   □

4. Ekvationen $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ har roten $x = 2$. Vilka övriga rötter har den? (3p)

Lösning: Att $x = 2$ är en rot innebär att $x - 2$ kan faktoriseras:
$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x-2)(2x^2 + x - 1)$ där de två övriga rötterna
fås av att lösa $2x^2 + x - 1 = 0$: $x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{-1\pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2}1 \\ -1 \end{cases}$ □

5. Beräkna $\dfrac{(10-5i)(1-2i)}{4+3i}$ (3p)

Lösning:

$$\frac{(10-5i)(1-2i)}{4+3i} = \frac{10-20i-5i+10i^2}{4+3i} = \frac{-25i(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{-75-100i}{16+9} = -3-4i$$

□

6. Bosse ska köpa godis för 50 kronor. Han väljer mellan kolor för 70 öre, karameller för 80 öre, sega gubbar för 1 krona och 10 öre. Bosse vill ha minst 1 godisbit av varje sort och totalt exakt 50 godisbitar, men han får ont i magen om det är minst 35 bitar av någon sort. Hur ska Pelle handla om han vill förbruka alla 50 kronorna utan att riskera magknip? (3p)

Lösning: Bosse köper x kolor, y karameller, z sega gubbar. Räknat i tiotal ören gäller då att $7x + 8y + 11z = 500$. Samtidigt köper han exakt 50 godisbitiar varmed $x + y + z = 50$, dvs $z = 50 - x - y$ så $7x + 8y + 11(50 - x - y) = 500 \Rightarrow 4x + 3y = 50$.

x	y	$\Rightarrow z$
$\cancel{1}$		
2	14	34
$\cancel{3}$, $\cancel{4}$		
5	10	35
$\cancel{6}$, $\cancel{7}$		
8	6	36
$\cancel{9}$, $\cancel{10}$		
11	2	37

Eftersom alternativet $(2, 14, 34)$ är det enda utan att något antal är minst 35, är svaret:
2 kolor, 14 karameller och 34 sega gubbar. □

7. På hur många sätt kan man få minst 4 klavar om man kastar "krona-klave" med ett mynt 10 gånger? (3p)

Lösning:
Antal sätt exakt 4: $\binom{10}{4} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2} = 210$
Antal sätt exakt 5: $\binom{10}{5} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 252$
Antal sätt exakt 6: $\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = 210$ (symmetri)
Antal sätt exakt 7: $\binom{10}{7} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 120$
Antal sätt exakt 8: $\binom{10}{8} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$
Antal sätt exakt 9: $\binom{10}{9} = 10$
Antal sätt exakt 10: $\binom{10}{10} = 1$

Totalt antal sätt $2 \cdot 210 + 252 + 120 + 45 + 10 + 1 = 848$.

(Man kan även resonera:
Totalt antal möjliga utfall $= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} = 2^{10} = 1024 \Rightarrow$ antalet sätt att få minst fyra klavar $= 1024 -$ antalet sätt att få mest 3 klavar $= 1024 - \binom{10}{3} - \binom{10}{2} - \binom{10}{1} - \binom{10}{0} =$
$= 1024 - 120 - 45 - 10 - 1 = 848$.) $\square$

8. Visa att $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ för alla $n, k \in \mathbb{N}$ så att $1 \le k \le n-1$. (4p)

Lösning: Vi har att

$$\binom{n+1}{k} - \binom{n-1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} - \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} - \frac{n!(n-k)}{k!(n-k)!n} = \frac{n!(n+1)n - n!(n-k)(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)n} =$$
$$= \frac{n!k(2n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)n} = \frac{(n-1)!(2n-k+1)}{(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} = \binom{n-1}{k-1}\frac{n-k+1+n}{n-k+1} = \binom{n-1}{k-1} + \frac{(n-1)!n}{(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} =$$
$$= \binom{n-1}{k-1} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{k-1} \quad \Rightarrow \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad \square$$

9. Visa att $25 | (3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{100})$. (3p)

Lösning: $\sum_{k=1}^{100} 3^k = \frac{3^{101}-1}{3-1} - 1 = \frac{3^{101}-3}{2} \overset{\text{ska visas}}{=} 25n$ för något heltal n.
Dvs vi ska visa att $3^{101} \equiv 3 \pmod{50}$.
$3^{101} = 3 \cdot 3^{5\cdot 2\cdot 10} = 3((3^5)^2)^{10} \equiv 3((3^5 - 5\cdot 50)^2)^{10} = 3((243-250)^2)^{10} =$
$= 3 \cdot 49^{10} \equiv 3(49 - 1\cdot 50)^{10} = 3 \pmod{50}$ $\square$