Lösningar till tentamen i Introduktionskurs i Matematik, 5p

Distanskurs
31 oktober, 2003 kl. 13.30 – 17.30

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 18p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 070-306 95 89).

1. Formulera och bevisa faktorsatsen. (3p)

   Lösning: (Se Analys i en variabel av Persson & Böiers, Sats 3, s. 52–53.) □

2. Bevisa att det finns oändligt många primtal. (3p)

   Lösning: (Se Diskret matematik av Bergström, Sats 2.3, s. 18.) □

3. Vilka av följande påståenden är sanna?
   För att motivera "sann": bevisa. För att motivera "ej sann": ge ett motexempel.
   (a) $A \cup B \subseteq A \cap B$ (1p)
   (b) $A \setminus B \subseteq B$ (1p)
   (c) $A^C \cap B^C \subseteq (A \cap B)^C$ (1p)
   (d) $(0, 1] \subseteq [0, 1)$ (1p)
   (e) $\mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{Z}$ (1p)

   Lösning:
   (a) ej sann: låt $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$.
   Då är t.ex. $1 \in A \cup B = \{1, 2, 3\}$ men $1 \notin A \cap B = \{2\}$.
   (b) ej sann: låt A och B vara som i (a).
   Då är t.ex. $1 \in A \setminus B = \{1\}$ men $1 \notin B = \{2, 3\}$.
   (c) SANN: Enligt de Morgans lagar är $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ och eftersom $C \cap D \subseteq C \cup D$ för alla mängder C och D är $A^C \cap B^C \subseteq A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$.
   (d) ej sann: $1 \in (0, 1]$ men $1 \notin [0, 1)$. (Detta är det <u>enda</u> motexemplet!)
   (e) ej sann: $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}^+$ men $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. □

4. Visa att $4 \mid n^4 + 2n^3 + n^2$. (3p)

   Lösning: Detta kan visas på åtminstone 2 sätt:

   - $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow (\sum_{k=1}^{n} k)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{2^2} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$. Eftersom kvadraten av summan av heltal alltid är ett heltal finns uppenbarligen $m \in \mathbb{Z} : m = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$ dvs $4m = n^4 + 2n^3 + n^2$ dvs $4|n^4 + 2n^3 + n^2$.

- Klart att $n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n+1)^2$. Eftersom varje heltal n antingen är jämnt ($n = 2k$) eller udda ($n = 2k+1$) har vi att om n är jämnt finns k så att $n = 2k$ varmed $n^2(n+1)^2 = 4k^2(2k+1)^2$ vilket är en multipel av 4. Om n är udda finns k så att $n = 2k+1$ varmed $n^2(n+1)^2 = (2k+1)^2(2k+2)^2 = (2k+1)^2 2^2 (k+1)^2 =$ $= 4(2k+1)^2(k+1)^2$ vilket är en multipel av 4. □

5. För vilka $z \in \mathbb{C}$ är $z + \dfrac{1}{z}$ reellt? (3p)

Lösning: $w = z + \frac{1}{z} = z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = a + bi + \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a(a^2+b^2)+a}{a^2+b^2} + \frac{b(a^2+b^2)-b}{a^2+b^2} i$ varmed $\operatorname{Im} w = 0$ då $b(a^2+b^2-1) = 0$ (obs! w odefinierat då $|z| = 0$ dvs i $z = 0$) dvs då $\underline{\operatorname{Im} z = b = 0}$ eller då $a^2 + b^2 - 1 = 0$ dvs $a^2 + b^2 = 1$ dvs $\underline{|z|^2 = 1}$ dvs på enhetscirkeln. Alltså: $\underline{w \text{ reellt för } z \in (\{z : \operatorname{Im} z = 0\} \setminus \{0\}) \cup \{z : |z| = 1\}}$. □

6. Pelle säljer julgranar för 99 kr/st. Emellertid finns en garanti som ger kunderna 88 kr/gran tillbaka om de ej är nöjda. Under en dag lämnas färre än 777 granar i retur och fler än 666 säljs. Hur många granar har Bosse sålt om vinsten blev 1111 kr? (4p) (Observera att Pelle under en dag kan få tillbaka fler granar än han säljer.)

Lösning: Om Pelle säljer x granar och får y granar i retur är

$$\begin{cases} 99x - 88y = 1111 \\ y < 777,\ x > 666 \end{cases}$$

Eftersom $\frac{99}{11} = 9$, $\frac{88}{11} = 8$, $\frac{1111}{11} = 101$ har vi

$$(*) \quad \begin{cases} 9x - 8y = 101 \\ x \geq 667,\ y \leq 776 \end{cases}$$

Den "relaterade ekvationen" är $9x - 8y = 1$ där $\mathrm{SGD}(9,8) = 1$ varmed en partikulärlösning till $(*)$ är $(101, 101)$. Allmän lösning är därmed $\{(101 - 8t, 101 - 9t) : t \in \mathbb{Z}\}$ och med $x \geq 667$ fås

t	x	y	kommentar
-70	661	731	x för litet
-71	669	740	ok
-72	677	749	ok
-73	685	758	ok
-74	693	767	ok
-75	701	776	ok
-76	709	785	y för stort

$\Rightarrow$ Pelle sålde 669, 677, 685, 693 eller 701 granar.

□

7. Lös fullständigt ekvationen $18x^3 + 9x^2 - 11x - 2 = 0$. (3p)

Lösning: Enligt sats om samband mellan koefficienter och rationella rötter: $p(\frac{b}{c}) = 0 \Rightarrow b|a_0 \wedge c|a_n$ där $p(\cdot)$ betecknar ekvationens vänsterled och a_0 och a_n är ekvationens konstant resp. högstagradskoefficient. I detta fall får vi att om ekvationen har en rationell rot $x = \frac{b}{c}$ måste $b|2$ dvs $b \in \{\pm 1, \pm 2\}$ och $c|18$ dvs $c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9\}$. Man finner (förhoppningsvis tidigt) att $x = -1$ är en rot varmed faktorn $(x+1)$ kan faktoriseras ut: $18x^3+9x^2-11x-2 = (x+1)(18x^2-9x-2)$ varmed vi kan få de återstående två rötterna genom att lösa $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{9}} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16\cdot 9}} = \frac{1}{4} \pm \frac{5}{4\cdot 3} = \begin{cases} 2/3 \\ -1/6 \end{cases}$
$\underline{x_1 = -1,\ x_2 = -1/6,\ x_3 = 2/3.}$ □

8. Lös fullständigt ekvationssystemet $\begin{cases} z^2 + \bar{z}^2 &= 16 \\ |z| &= \sqrt{10} \end{cases}$ (3p)

Lösning: Man kan säkert lösa detta system genom att sätta $z = a + bi$ och räkna på. Jag vill dock visa på en annan elegant (?) lösning: kom ihåg att: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z,\ z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$. Låt oss nu börja med skriva systemet
$\begin{cases} z^2 + \bar{z}^2 &= 16 \quad (1) \\ 2|z|^2 &= 20 \quad (2) \end{cases}$
Genom ledvis addition får vi nu
$(1)+(2):\ z^2 + \bar{z} + 2|z|^2 = 16 + 20$. Eftersom $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ är vänster led $(z+\bar{z})^2$ varmed $z + \bar{z} = \pm 6$. Men $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z$ så $\mathrm{Re}\, z = \pm 3$.
Genom ledvis subtraktion fås på liknande sätt
$(1)-(2):\ z^2 + \bar{z} - 2|z|^2 = 16 - 20$ där vänster led nu är $(z-\bar{z})^2$ varmed $z - \bar{z} = \pm 2i$ och eftersom $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$ så $\mathrm{Im}\, z = \pm 1$.
Därmed är lösningarna $\underline{z_1 = -3 - i,\ z_2 = -3 + i,\ z_3 = 3 - i,\ z_4 = 3 + i.}$ □

9. Hur många av talen $1, 2, 3, \ldots, 10\,000$ innehåller högst 2 lika siffror? (3p)

Lösning: Vi vill beräkna
$\{$*antalet tal med högst 2 siffror lika*$\} = 10\,000 - \{$*antalet tal med minst 3 siffror lika*$\}$.

Exakt 4 lika:		Exakt 3 lika						
$1111, 2222, \ldots, 9999, 10000$		$100, \ldots, 999$		$1000, \ldots, 9999$ utan nollor		$1001, \ldots, 9999$ utan lika nollor		$1000, 2000, \ldots, 9000$
10	$+$	9	$+$	$9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8\binom{4}{1}$	$+$	$9 \cdot \underbrace{1}_{\text{nolla}} \cdot 1 \cdot 1\binom{3}{1}$	$+$	9

vilket blir $10 + 9 + 72 \cdot 4 + 27 + 9 = 343$ varmed antalet tal med högst 2 lika siffror är $10\,000 - 343 = \underline{9\,657}$. □