Lösningar till Tentamen i Introduktionskurs i Matematik

Distanskurs
19 januari, 2002 kl. 9.00 – 13.00

1. Bevisa att om $\mathrm{SGD}(a,b) \not| c$ så saknar den diofantiska ekvationen $ax + by = c$ lösning. (3p)

   Lösning: (Se Diskret matematik av Bergström, Faktum 2.1, s. 23.) $\square$

2. Formulera och bevisa satsen om geometrisk summa. (3p)

   Lösning: (Se Analys i en variabel av Persson Böiers, Sats 5, s. .) $\square$

3. Är $\Big((x > 7x) \land (x < 0 \Rightarrow x \neq -1)\Big) \Rightarrow (x \neq -1)$ en tautologi, kontradiktion eller ingetdera? (3p)

   Lösning:
   Denna uppgift kan lösas på två sätt.

   1. Klart är att eftersom $x \in \mathbb{R}$ måste antingen
      $(x = -1)$ eller $(x < 0$ och $x \neq -1)$ eller $(x > 0)$.
      Då har vi följande sanningsvärdestabell:

x	$\Big((x > 7x)$	$\land$	$(x < 0$	$\Rightarrow$	$x \neq -1)\Big)$	$\Rightarrow$	$(x \neq -1)$
$x = -1$	S	F	S	F	F	**S**	F
$x < 0, x \neq -1$	S	S	S	S	S	**S**	S
$x > 0$	F	F	F	S	S	**S**	S

      Eftersom utsagan är sann för alla värden på x är den en tautologi.

   2. Låt $P = \{x > 7x\}$ och $Q = \{x \neq -1\}$.
      Observera sedan att $x > 7x \Leftrightarrow 0 > 6x \Leftrightarrow x < 0$.
      Därmed kan utsagan $\Big((x > 7x) \land (x < 0 \Rightarrow x \neq -1)\Big) \Rightarrow (x \neq -1)$ skrivas $(P \land (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ vilket är *Modulus Ponens*, en av de logiska lagarna som gäller för alla värden på P och Q. Således är utsagan en tautologi. $\square$

4. Hur många, ej nödvändigtvis meningsfulla ord kan man bilda om man utnyttjar alla bokstäverna i ordet DIVISION? (3p)

Lösning:
Bokstaven ”I” förekommer 3 gånger.
Alla andra bokstäver förekommer endast en gång.
Därmed är
Antal ”ord” $= \dfrac{8!}{3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \underline{6720}$. $\square$

5. Bestäm alla heltalslösningar (x, y) till ekvationen $4x - 7y = 99$ så att både x och y är positiva primtal mindre än 100. (4p)

Lösning:
$\text{SGD}(4, 7) = 1$ så hjälpekvationen (den ”relaterade ekvationen”) är $4x - 7y = 1$.
Med Euklides algoritm får vi

$$\begin{aligned} 7 &= 1 \cdot 4 + 3 \\ 4 &= 1 \cdot 3 + 1 \end{aligned}$$

och baklänges blir detta

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 1 \cdot 3 \\ &= 4 - 1 \cdot (7 - 1 \cdot 4) \\ &= 4 \cdot 2 - 7 \cdot 1 \end{aligned}$$

dvs $(x_0, y_0) = (2, 1)$ är en partikulärlösning (vilket man kanske kunde insett utan denna utläggning...)
Samtliga lösningar ges därmed av

$$\begin{cases} x = 99 \cdot 2 + (-7)t \\ y = 99 \cdot 1 - 4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 198 - 7t \\ y = 99 - 4t \end{cases}$$

För att $0 < x < 100$ räcker det att kolla $t = 15, 16, \ldots, 28$
och för att $0 < y < 100$ räcker det att kolla $t = 1, 2, \ldots 24$
$\Rightarrow$ Endast $t = 15, 16, \ldots, 24$ är aktuella:

t	x	y
15	93	39
16	86	35
17	**79**	**31**
18	72	27
19	65	23
20	58	23
21	51	15
22	44	11
23	**37**	**7**
24	30	3

$\underline{\text{Svar: } (x, y) = (79, 31) \text{ och } (x, y) = (37, 7)}$. $\square$

6. Bestäm den principala resten vid division av 88^8 med 18. (3p)

Lösning:
Vi ska beräkna principal rest (p.r.) vid division av 88^8 med 18.
Enligt divisionsalgoritmen och utveckling av binom får vi att
$88^8 = (4 \cdot 18 + 16)^8$ så 88^8 har samma p.r. som 16^8.
$16^8 = 16^{2 \cdot 4} = 256^4 = (14 \cdot 18 + 4)^4$ så 88^8 har samma p.r. som 4^4.
$4^4 = 16^2 = 256 = 14 \cdot 18 + 4$ varmed $\underline{\text{den principala resten är 4}}$.

7. Beräkna $\left(\frac{3-7i}{2+5i}\right)^5 + \left(\frac{3+7i}{2-5i}\right)^5$ och svara på rektangulär form. (4p)

Lösning:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3-7i}{2+5i}\right)^5 + \left(\frac{3+7i}{2-5i}\right)^5 &= \left(\frac{(3-7i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)}\right)^5 + \left(\frac{(3+7i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)}\right)^5 \\
&= \left(\frac{6-15i-14i+35i^2}{4+25}\right)^5 + \left(\frac{6+15i+14i+35i^2}{4+25}\right)^5 \\
&= \left(\frac{-29-29i}{29}\right)^5 + \left(\frac{-29+29i}{29}\right)^5 \\
&= (-1-i)^5 + (-1+i)^5 \\
&= (\sqrt{2}(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}i))^5 + (\sqrt{2}(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}i))^5 \\
&= (2^{1/2})^5(\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4})^5 + (2^{1/2})^5(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4})^5 \\
&= 2^{5/2}\Big((\cos\tfrac{25\pi}{4} + i\sin\tfrac{25\pi}{4}) + (\cos\tfrac{15\pi}{4} + i\sin\tfrac{15\pi}{4})\Big) \\
&= 2^{2+1/2}\Big((\cos\tfrac{(25-24)\pi}{4} + i\sin\tfrac{(25-24)\pi}{4}) + (\cos\tfrac{(15-8)\pi}{4} + i\sin\tfrac{(15-8)\pi}{4})\Big) \\
&= 2^2 \cdot 2^{1/2}\Big((\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}i) + (\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}i)\Big) \\
&= \underline{8}
\end{aligned}$$

□

8. Bevisa att $\sum_{k=1}^{n} k(3k+1) \;=\; n(n+1)^2$ för alla positiva heltal n. (3p)

Lösning:

Bevis med hjälp av induktion.

Basfall: $n = 1$

$1 \cdot (3 \cdot 1 + 1) = 4$

$1 \cdot (1 + 1) = 4$ ok!

Induktionsantagande: $\sum_{k=1}^{n} k(3k+1) \;=\; n(n+1)^2$

Induktionssteg: Vi ska visa att $\sum_{k=1}^{n+1} k(3k+1) \;=\; (n+1)(n+2)^2$.

Vi har att

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(3k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(3k+1) + (n+1)(3(n+1)+1).$$

Enligt induktionsantagandet får vi att

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(3k+1) &= n(n+1)^2 + (n+1)(3(n+1)+1) \\
&= (n+1)(n(n+1) + 3(n+1) + 1) \\
&= (n+1)(n^2 + n + 3n + 3 + 1) \\
&= (n+1)(n^2 + 4n + 4) \\
&= (n+1)(n+2)^2
\end{aligned}$$

vilket skulle bevisas.

$\square$

9. En av rötterna till ekvationen $36x^4 - 144x^3 - 239x^2 + 321x = 130$ är $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$. Bestäm samtliga rötter. (4p)

Lösning:
$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$ är en rot $\Rightarrow$ konjugatet $x_2 = \bar{x}_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$ är också en rot.
Vidare är

$$\begin{aligned}
(x - x_1)(x - x_2) &= \Big(x - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}i)\Big)\Big(x - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}i)\Big) \\
&= x^2 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}i)x - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}i)x + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}i)(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}i) \\
&= x^2 - x + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{9}i^2 \\
&= x^2 - x + \tfrac{9+4}{36} \\
&= x^2 - x + \tfrac{13}{36}
\end{aligned}$$

Eftersom ekvationen har enbart heltalskoefficienter delar vi vänsterledet med $36(x - x_1)(x - x_2) = 36x^2 - 36x + 13$:

$$\begin{array}{rrr|rrrrr}
 & & & & & x^2 & -3x & -10 \\
\hline
36x^2 & -36x & +13 & 36x^4 & -144x^3 & -239x^2 & +321x & -130 \\
 & & - & (36x^4 & -36x^3 & +13x^2) & & \\
\cline{4-6}
 & & & 0 & -108x^3 & -252x^2 & +321x & \\
 & & & - & (-108x^3 & +108x^2 & -39x) & \\
\cline{5-7}
 & & & & 0 & -360x^2 & +360x & -130 \\
 & & & & - & (-360x^2 & +360x & -130) \\
\cline{6-8}
 & & & & & & & 0
\end{array}$$

varmed ekvationen kan skrivas $36(x - x_1)(x - x_2)(x^2 - 3x - 10) = 0$.

De återstående 2 rötterna fås nu genom att lösa andragradaren
$x^2 - 3 - 10 \,=\, 0$:

$$x \;=\; \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} \;=\; \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2} \;=\; \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$$

Totalt har vi nu kommit fram till:
förutom roten $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$ har ekvationen rötterna
$\underline{x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i,\ x_3 = 5 \text{ och } x_4 = -2.}$ $\square$