Lösningar till tentamen i Introduktionskurs i Matematik

Distanskurs
20 oktober, 2001 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 18p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe. **Telefonvakt**: Georgi Tchilikov (035-16 71 24).

1. Formulera och bevisa triangelolikheten för reella tal. (3p)

   Lösning: (Se Analys i en variabel av Persson & Böiers, Sats 1, s. .) □

2. Formulera och bevisa de Morgans lagar. (3p)

   Lösning: (Se Diskret matematik av Bergström, Övning 13, s. 12.) □

3. Låt $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \leq 3\}$ och $B = \{x \in \mathbb{R} : |2x+1| < 2\}$. Vad är då
   a) $A \cap B$? (1p) b) $A^C \setminus B$? (1p)

   Lösning:
   a)

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \leq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x-2 \leq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 5\} \\ &= [-1, 5] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{R} : |2x+1| < 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -2 < 2x+1 < 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (-2-1)/2 < x < (2-1)/2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -3/2 < x < 1/2\} \\ &= (-\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 5 \text{ och } -3/2 < x < 1/2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 1/2\} \\ &= \underline{[-1, \tfrac{1}{2})} \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} A^C &= \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \not\leq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x-2| > 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x-2 < -3 \text{ eller } x-2 > 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ eller } x > 5\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^C \setminus B &= \{x \in \mathbb{R} : (x < -1 \text{ eller } x > 5) \text{ men inte } (-3/2 < x < 1/2)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x < -1 \text{ eller } x > 5) \text{ och } (x \leq -3/2 \text{ eller } x \geq 1/2)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x < -1 \text{ och } x \leq -3/2) \text{ eller } (x > 5 \text{ och } x \geq 1/2)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq -3/2 \text{ eller } x > 5\} \\ &= \underline{(-\infty, -3/2] \cup (5, \infty)} \end{aligned}$$

□

4. En man vill indela ett år i sin kalender i veckor (7-dagars-perioder) och deckor (10-dagars-perioder) som ej överlappar varandra. Hur många deckor kan mannen maximalt få plats med om kalendern ska gå jämnt upp? (Antag att det ej är skottår.) (3p)

Lösning:
Vi vill lösa den diofantiska ekvationen $7x + 10y = 365$.
Hjälpekvation är $7x + 10y = \mathrm{SGD}(7, 10) = 1$.

Euklides algoritm	och sedan	Eukl. baklängesalgoritm
$10 = 7 \cdot 1 + 3$		$1 = 7 - 2 \cdot 3$
$7 = 2 \cdot 3 + 1$		$= 7 - 2 \cdot (10 - 7 \cdot 1)$
$3 = 3 \cdot 1 + 0$		$= 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10$

Alltså är en lösning till hjälpekvationen $(3, -2)$ så en lösning till huvudekvationen är $(3 \cdot 365, -2 \cdot 365)$.
Den allmänna lösningen blir

$$\begin{cases} x = 3 \cdot 365 + 10t \\ y = -2 \cdot 365 - 7t \end{cases}$$

och om vi skiftar tecken på t $\begin{cases} x = 3 \cdot 365 - 10t \\ y = -2 \cdot 365 + 7t \end{cases}$

Positiva lösningar fås för $t \leq 36 \cdot 3 + 1 = 109$ <u>och</u> $t \geq 2 \cdot (50 + 2) + 1 = 105$
dvs för $t = 105, 106, 107, 108, 109$.
Beräknar man x och y för dessa parametervärden fås:

t	x	y
105	$1095 - 1050 = 45$	$-730 + 735 = 5$
106	35	12
107	25	19
108	15	26
109	5	33

<u>Alltså är 5 veckor och 33 deckor den konfiguration som ger flest antal deckor.</u>

(Man kan även komma fram till denna lösning på andra sätt.) □

5. Skriv talen $(i - 1)^{2/3}$ på rektangulär form. (4p)

Lösning:
Observera att det i uppgiften står "tal**en** $(i-1)^{2/3}$" vilket indikerar att lösningen är flera tal. Antalet tal är 3 vilket kommer sig av att n:te roten är n tal.
Vi har att $-1 + i = \sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4})$ och genom att använda de Moivres lag $(\cos\theta + i \sin\theta)^a = \cos a\theta + i \sin a\theta$ får vi att

$$\begin{aligned}
(-1+i)^{2/3} &= (2^{1/2})^{2/3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^{2/3} \\
&= 2^{1/3}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)\right)^{2/3} \\
&= 2^{1/3}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)\right) \\
&= \begin{cases} 2^{1/3}(\cos(\frac{3\pi}{6} - \frac{8\pi}{6}) + i\sin(\frac{3\pi}{6} - \frac{8\pi}{6})) & \text{om } n = -1 \\ 2^{1/3}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) & \text{om } n = 0 \\ 2^{1/3}(\cos(\frac{3\pi}{6} + \frac{8\pi}{6}) + i\sin(\frac{3\pi}{6} + \frac{8\pi}{6})) & \text{om } n = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 2^{1/3}(\cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6})) \\ 2^{1/3}(0 + i \cdot 1) \\ 2^{1/3}(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2^{1/3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) \\ 2^{1/3}i \\ 2^{1/3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) \end{cases}$$

Jag gick inte igenom detta ordentligt vid ett liknande exempel vid vårt senaste möte. Emellertid har jag gått igenom det noggrannt i föreläsningsanteckningarna på kurshemsidan och avsnittet om n:te rötter finns utförligt i boken. Jag har givit en poängs avdrag om man endast hittat ett av talen. $\square$

6. Visa att polynomet

$$8z^4 - 64z^3 + 262z^2 - 466z + 305$$

har nollstället $z = \frac{1}{2}(3+i)$ samt faktorisera polynomet i irreducibla komplexa polynom. (5p)

Lösning:
Låt $p(z) = 8z^4 - 64z^3 + 262z^2 - 466z + 305$. Om $z = \frac{1}{2}(3+i)$ är ett nollställe måste även $\bar{z} = \frac{1}{2}(3-i)$ vara nollställe. Därmed måste polynomet gå att faktorisera $p(z) = (z - \frac{1}{2}(3+i))(z - \frac{1}{2}(3-i))q(z)$ där $\deg q = 2$. Med andra ord: om vi visar att $(z - \frac{1}{2}(3+i))(z - \frac{1}{2}(3-i)) = z^2 - 3z + \frac{5}{2}$ delar $p(z)$, så har vi både visat att $\frac{1}{2}(3+i)$ är ett nollställe och dessutom beräknat kvoten $q(z)$ vars nollsällen sedan kan beräknas genom att lösa andragradsekvationen $q(z) = 0$.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
 & & & & & 8z^2 & -40z & +122 & & \\
\underline{q\,\rceil\, p} & = & \underline{z^2} & \underline{-3z} & \underline{+\frac{5}{2}} \,\rceil & 8z^4 & -64z^3 & +262z^2 & -466z & 305 \\
 & & & & - & (8z^4 & -24z^3 & +20z^2) & & \\
\cline{6-8}
 & & & & & 0 & -40z^3 & +242z^2 & -466z & \\
 & & & & & - & (-40z^3 & +120z^2 & -100z) & \\
\cline{7-9}
 & & & & & & 0 & +122z^2 & -366z & +305 \\
 & & & & & & - & (122z^2 & -366z & +305) \\
\cline{8-10}
 & & & & & & & & & 0
\end{array}$$

Så $8(z^2 - 5z + \frac{61}{4})$ är en faktor till $p(z)$ med nollställen som fås genom att lösa ekvationen $z^2 - 5z + \frac{61}{4} = 0$:

$$\begin{aligned} z &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{61}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \frac{6i}{2} \\ &= \frac{1}{2}(5 \pm 6i) \end{aligned}$$

Därmed är faktoriseringen av $p(z)$
$(z - \frac{1}{2}(3+i))(z - \frac{1}{2}(3-i))8(z - \frac{1}{2}(5+6i))(z - \frac{1}{2}(5-6i)) =$
$= \underline{(z - 3/2 - i/2)(2z - 3 + i)(2z - 5 - 6i)(2z - 5 + 6i)}.$ $\square$

7. Visa att

$$\binom{m+n}{n} = \binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{n-1}$$

för alla $m, n \in \mathbb{Z}^+$. (3p)

Lösning:

$$\begin{aligned}
\binom{m+n}{n} &= \frac{(m+n)!}{(m+n-n)!\,n!} \\
&= \frac{(m+n)!}{m!\,n!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\binom{m+n-1}{m-1} &= \frac{(m+n-1)!}{(m+n-1-(m-1))!\,(m-1)!} \\
&= \frac{\frac{1}{m+n}\,(m+n)!}{n!\,\frac{1}{m}\,m!} \\
&= \frac{m}{m+n}\cdot\frac{(m+n)!}{n!\,m!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\binom{m+n-1}{n-1} &= \frac{(m+n-1)!}{(m+n-1-(n-1))!\,(n-1)!} \\
&= \frac{\frac{1}{m+n}\,(m+n)!}{n!\,\frac{1}{n}\,m!} \\
&= \frac{n}{m+n}\cdot\frac{(m+n)!}{n!\,m!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{n-1} &= \frac{m}{m+n}\cdot\frac{(m+n)!}{n!\,m!} + \frac{n}{m+n}\cdot\frac{(m+n)!}{n!\,m!} \\
&= \frac{m(m+n)! + n(m+n)!}{(m+n)\,n!\,m!} \\
&= \frac{(m+n)((m+n)!)}{(m+n)\,n!\,m!} \\
&= \frac{(m+n)!}{n!\,m!} \\
&= \binom{m+n}{n}
\end{aligned}$$

$\square$

8. Visa att $n^3 < 5n!$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (4p)

Lösning:
Induktionsbevis
Basfall: $n = 0 \begin{cases} n^3 = 0^3 = 0 \\ 5n! = 5(0!) = 5 \end{cases}$ och $0 < 5$ ok!

Induktionssteg: Antag $n^3 < 5n!$.
Visa nu att $(n+1)^3 < 5(n+1)!$.
Detta är ekvivalent med att visa att

$$\frac{(n+1)^3}{(n+1)!} < 5\,.$$

Dvs att $\frac{(n+1)(n+1)^2}{(n+1)n!} = \frac{(n+1)^2}{n!} < 5$.
Om vi kan visa detta för $n \geq 3$ så kan vi kontrollera fallen $n = 1$ och $n = 2$ som specialfall.
Enligt induktionsantagandet vet vi att $\frac{n^3}{n!} < 5$.
Så det räcker att visa att $\frac{(n+1)^2}{n!} \leq \frac{n^3}{n!}$
dvs att $(n+1)^2 \leq n^3$, dvs att $\frac{(n+1)^2}{n^3} \leq 1$.
Antag $n \geq 3$. Då är
$\frac{(n+1)^2}{n^3} = \frac{n^2+2n+1}{n^3} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq 2(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}) \leq 2(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}) = 2 \cdot \frac{9+3+1}{27} = 2 \cdot \frac{13}{27} = \frac{26}{27} < 1.$

Därmed har vi visat att $n^3 < 5n!$ då $n = 0$
och att $(n^3 < 5n!) \;\Rightarrow\; (n+1)^3 < 5(n+1)!$ då $n \geq 3$. Då återstår fallen då $n = 1$ och $n = 2$.
Antag $n = 1 \begin{cases} n^3 = 1^3 = 1 \\ 5n! = 5(1!) = 5 \end{cases}$ och $1 < 5$ ok!

Antag $n = 2 \begin{cases} n^3 = 2^3 = 8 \\ 5n! = 5(2!) = 10 \end{cases}$ och $8 < 10$ ok!

Därmed har vi visat att $n^3 < 5n!$ för alla $n \in \mathbb{N}$. □

(Observera att i slutändan var det fallet $n = 2$ som blev basfallet i induktionen och fallen $n = 0$ och $n = 1$ var specialfall som kontrollerades separat.) □

9. Om man drar en pokerhand (dvs på måfå tar 5 kort ur en kortlek), hur många sätt kan man få fyrtal (dvs 4 kort av samma valör, t.ex. 4 femmor) på? (3p)

Lösning:
Om man räknar med hänsyn till ordning får man att första kortet kan fås på 52 sätt, andra kortet på 3 sätt, tredje kortet på 2 sätt, fjärde kortet på 1 sätt och femte kortet på 48 sätt. Dessutom kan fyrtalet förekomma bland de 5 korten på $\binom{5}{4} = 5$ sätt. Därmed är det totala antalet sätt $5 \cdot 52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 48 = \underline{77\,880}$.

Om man räknar utan hänsyn till ordning får man att fyrtalet kan fås på 13 sätt och det femte kortet kan fås på 48 sätt. Det totala antalet sätt blir då $13 \cdot 48 = \underline{624}$. □