# FAQ (Frequently Asked Questions)

## Ordningsfrågor

1. Kan man läsa boken “Algebra och kombinatorik” eller “Algebra och geometri” av Vretblad istället för “Albegra i matematiken” av av Thorbiörnson som kurslitteratur?
2. Hur pass viktiga är sista inlämningsdatum för inlämningsuppgifterna?
3. Får jag tillgodoräkna mig bonuspoängen till en omtenta?
4. När jag löser övnings- och inlämningsuppgifter, hur viktigt är det att min väg till lösningen har redovisats på samma sätt som Thorbiörnson? (Ska man t.ex. vid ekvationslösning ha ekvivalens- eller implikationspilar el. dyl. mellan varje steg eller är det fullgott att på vanligt manér teckna delstegen under varandra?)
5. Hur gör jag och hur lämnar jag in inlämningsuppgifterna?

## Matematikfrågor

6. Är det någon skillnad på ett *påstående* och en *utsaga*?
7. Vad betyder symbolen “:” då man skriver en utsaga?
8. Vad betyder symbolerna “$\nexists$” och “$\not\forall$”?
9. Övningsuppgiften 1.19 i boken har inget facit. Vad blir svaret och hur kommer man fram till det?
10. Angående fråga 4 på inlämningsuppgift 2, får man använda Venn-diagram när man bevisar dessa formler?
11. Hur uttrycker man absolutbeloppet m.h.a. max(a,b)?
12. Vad är “rektangulär form”?
13. Hur löser man övningsuppgift 5.40 i boken?
14. Hur löser man övningsuppgift 5.47 i boken?

---

1. Q: Kan man läsa boken “Algebra och kombinatorik” eller “Algebra och geometri” av Vretblad istället för “Albegra i matematiken” av av Thorbiörnson som kurslitteratur?

   A: Böckerna av Vretblad kan vara bra vid undervisning på en vanlig kurs med föreläsningar men för distanskurs är det bättre med en utförligare och grundligare bok såsom Thorbiörnsons. Därför används den istället. Men Vretblad kan vara fortfarande bra för att få alternativa förklaringar till olika avsnitt.

2. Q: Hur pass viktiga är sista inlämningsdatum för inlämningsuppgifterna?

   A: De är viktiga att hålla för att inte hamna på efterkälken i kursen. Om ni skickar in en (några dagar) försenad inlämningsuppgift så rättar jag den och skickar tillbaks den precis som vanligt, så på det viset är det inget omedelbart problem, men er egen studietakt och förståelse av kursinnehållet (och därmed förmåga att klara av tentan) mår bäst av att ligga på rätt sida om dessa datum, tro mig! (Dessutom: inlämningsuppgifter som lämnas in efter datumet för tentamen kan naturligtvis inte ge några bonuspoäng.)
   Man bör dock inte dra sig för att skicka in lösningar som man inte är helt säker på eller en ofullständigt löst uppgift. Vitsen med inlämningsuppgifterna är att man ska kämpa så gott man kan vilket ger bättre träning och inlärning än att bara lösa uppgifter i boken och kontrollera med facit alternativt försöka på uppgifter i boken och fråga mig om svaret på dem. Bonuspoängen till tentan är tänkt som en morot som ska sporra er till att skicka in dem. Jag är glad att få så många inlämningsuppgifter som möjligt.

3. Q: Får jag tillgodoräkna mig bonuspoängen till en omtenta?

   A: Nej, bonuspoäng från inlämningsuppgifter gäller endast vid det ordinarie tentatillfället.

4. Q: När jag löser övnings- och inlämningsuppgifter, hur viktigt är det att min väg till lösningen har redovisats på samma sätt som Thorbiörnson? (Ska man t.ex. vid ekvationslösning ha ekvivalens- eller implikationspilar el. dyl. mellan varje steg eller är det fullgott att på vanligt manér teckna delstegen under varandra?)

   A: Det är bra att ta med ekvivalens- och implikationspilar nu så att man själv blir noggrann med riktningen i de logiska resonemangen. När man blivit mer varm i kläderna tänker man mer instinktivt på dessa saker och räkningarna blir säkrare och klarare. I fortsättningen är det ej nödvändigt att ha pilar som indikerar varje steg men ibland kan det vara bra då ett förtydligande behövs.

5. Q: Hur gör jag och hur lämnar jag in inlämningsuppgifterna?

   A: Jag rekommenderar att man gör så här:
   1. Skriv ut pdf-filen (inlämingsuppgiften) på skrivaren.
   2. Gör uppgifterna och renskriv lösningarna på utskriftspapprena.
   3. Skicka de renskrivna lösningarna till mig med vanlig post.
   
   Jag rttar därefter uppgifterna, kopierar min egen lösning till de uppgifter ni gjort fel och skickar alltsammans tillsammans med ett besked om resultatet med post tillbaks till er. På detta vis får ni värdefull träning av att skriftligen uttrycka era matematiska resonemang.
   Vissa brukar göra inlämningsuppgifterna i Word och detta är ok, men jag föredrar det ovanstående sättet.
   Jag vill ej ha lösningar som scannats in och skickas som attachemnt i email då dessa bilder tenderar att antingen bli för stora eller ha för dålig upplösning.

6. Q: Är det någon skillnad på ett *påstående* och en *utsaga*?

   A: Nej, det är väsentligen samma sak. Ett matematiskt "påstående" ska dock ha potential att vara verifierbart eller falsifierbart. Dvs beroende på de ingående variablernas värden ska påståendet vara antingen sant eller falskt. Några exempel:

   "Petter är ganska snäll"

   Visserligen ett påstående men knappast speciellt matematiskt eftersom det är svårt att veta hur stor "snällhet" som fordras för att vara "snäll" för att inte tala om "ganska snäll" (och för all del vem "Petter" är...)

   "Efter att man dött kommer man till himmelen eller helvetet"

   Helt godkänd utsaga. Det är dock inte lätt att veta om den är sann eller falsk men en utsaga är det. Visserligen är inte heller detta påstående lätt att avgöra sanningshalten av men det är klart att det måste vara antingen sant eller falskt (förutsatt att det är väldefinierat vad "himmel" och "helvete" egentligen är men den lämnar vi åt teologerna).

   "$x = y$"

   Definitivt en utsaga, som är sann då varaiablerna $x$ och $y$ har samma värde. Om man endast vet att $x$ och $y$ är tal ur mängden $M = \{2, 3, 4, 5, 7\}$ kan dess sanningsvärde ej bestämmas men om man dessutom vet att t.ex. $x = a$ där a tillhör $M$, och $y = a + 1$, vet man att utsagan är falsk.

   "$x + y$"

   Definitivt *inte* en utsaga. Det är ju inget påstående...
   Observera att genom att kombinera utsagor med logiska operatorer kan man konstruera nya utsagor.

7. Q: Vad betyder symbolen ":" då man skriver en utsaga?

   A: Symbolen ":" fungerar som en *konkatenering*, dvs en "sammanbindning" för den binder samman vad kvantorerna säger och vad resten av utsagan säger. Lite grovt kan man säga att efter allkvantorn betyder ":" "gäller att" och efter existenskvantorn betyder ":" "så att". Låt oss se några exempel.
   Utsagan "$\forall\, x \in \mathbb{R}^+ : x > 0$" blir med ord "För alla positiva reella tal $x$ gäller att $x$ är större än 0". I detta fall stod ":" för delen "gäller att".
   Utsagan "$\exists\, a, b \in \mathbb{N} : a > b$" blir med ord "Det finns naturliga tal $a$ och $b$ sådana att $a$ är större än $b$". I detta fall stod ":" för delen "sådana att".
   Utsagan "$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : (|x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \epsilon)$" blir med ord "För alla reella tal $x$ och $y$ och positiva tal $\epsilon$ finns något positivt tal $\delta$ sådant att närhelst $x$ och $y$ är närmare än $\delta$ ifrån varandra så är $x^2$ och $y^2$ närmare än $\epsilon$ ifrån varandra". Även i detta fall stod ":" för delen "sådana att".

8. Q: Vad betyder symbolerna "$\nexists$" och "$\not\forall$"?

   A: $\nexists x : P(x)$ betyder $\neg(\exists x : P(x))$
   $\not\forall x : P(x)$ betyder $\neg(\forall x : P(x))$
   där $P(x)$ är en utsaga med variablen $x$.

9. Q: Övningsuppgiften 1.19 i boken har inget facit. Vad blir svaret och hur kommer man fram till det?

   A: Frågan "Är utsagan korrekt?" kan antingen uppfattas som 1. "Är utsagan giltig?" eller 2. "Är utsagan sund?". För att vara giltig ska utsagan $(P \Rightarrow (R \wedge Q)) \wedge (R \Rightarrow (\neq S \vee T)) \wedge (P \wedge Q) \wedge S \Rightarrow T$ vara en tautologi (dvs sann för alla värde på variablerna). Detta kan avgöras med en stor sanningsvärdestabell men det blir ganska många fall att kontrollera (närmare bestämt $2^5 = 32$ stycken). Fråga nummer 1 kan dock enkelt avgöras genom att vänserledet, $(P \Rightarrow (R \wedge Q)) \wedge (R \Rightarrow (\neq S \vee T)) \wedge (P \wedge Q) \wedge S$ är falskt närhelst $P$, $Q$ eller $S$ är det. Därmed är hela utsagan sann närheltst $P$, $Q$ eller $S$ är falska. Alltså behöver vi bara kontrollera specialfallen då $P$, $Q$ och $S$ alla är sanna! Vi får:

| $P$ | $Q$ | $R$ | $S$ | $T$ | $(P$ | $\Rightarrow$ | $(R \wedge Q))$ | $\wedge$ | $(R$ | $\Rightarrow$ | $(\neg S \vee T))$ | $\wedge$ | $(P \wedge Q)$ | $\wedge$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | − | 0 | 1 | 0 | − | 1 | − | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | − | 1 | 0 | 0 | − | 1 | − | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | − | 0 | 1 | 1 | − | 1 | − | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | − | 1 | 1 | 1 | − | 1 | − | 1 |

   För att evaluera de kolumner markerade med − har vi nu första raden: $0 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 0$ där $T = 0$, andra raden: $1 \wedge 0 \wedge 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 0$ där $T = 0$, tredje raden: $0 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 0$ där $T = 1$, fjärde raden: $1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 1$ där $T = 1$. Detta innebär att vänsterledet endast är sant i specialfallet då alla variablerna $P, Q, R, S, T$ är sanna, och speciellt är då även $T$ sant. Därmed är utsagan giltig.
   För att vara sund ska dessutom var och en av premisserna vara sanna, men eftersom vi här har t.ex. en premiss som bara är $S$ (som knappast är en tautologi) så kan utsagan knappast sägas vara sund utan mer information om vad variablerna står för.

10. Q: Angående fråga 4 på inlämningsuppgift 2, får man använda Venn-diagram när man bevisar dessa formler?

    A: Ja, det är ok. Vid mötet den 2/10 kommer jag att gå igenom bevisteknik och bl.a. ett mer formellt sätt att bevisa denna typ av uppgift.

11. Q: Hur uttrycker man absolutbeloppet m.h.a. max(a,b)?

    A: $|x|$ kan uttryckas m.h.a. $\max(y, z)$ (dvs maximum av de två talen $y$ och $z$) som $\max(x, -x)$ (dvs $\max(y, z)$ med $y = x$ och $z = -x$). I fråga 4 på inl.uppg. 2 är det meningen att man ska uttrycka $|a - b|$ som maximum av två uttryck som har med $a$ och $b$ att göra.

12. Q: Vad är "rektangulär form"?

A: *Rektangulär form* är formen $a+bi$ (till skillnad från *polär form*: $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ och *exponentiell form*: $re^{i\theta}$ (egentligen kan man säga att polär och exponentiell form är densamma eftersom det är samma parameterar, $r$ och $\theta$).

13. Q: Hur löser man övningsuppgift 5.40 i boken?

A: För att lära sig måste man försöka själv riktigt ordentligt först. Har man väl kört fast är det naturligtvis bättre med en förklaring än inget alls men det är viktigt att inte lura sig själv – att välja förklaringen utan att riktigt ha försökt själv, för på det viset lär man sig överaskande lite!

Tips: alltid när det handlar om potenser av komplexa tal ska man ha *polär form* i hågen. (Sluta läsa här om du vill försöka på uppgiften igen innan du får hela lösningen).

Ekvationen är $z^5 = (z+1)^5$. $(*)$

Det verkar vid ett första påseende vara en femtegradsekvation. Emellertid ser man att utveckling av högerledet ger att $z^5 = z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1$ dvs $5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1 = 0$ dvs en 4-gradsekvation! Därmed kan vi förvänta oss att hitta 4 rötter. Klart att $z = 0$ ej är en rot (ty $0^5 = 0$ är ej lika med $(0+1)^5 = 1$). Därmed kan vi dividera båda led i $(*)$ med $z^5$ och får då $((z+1)/z)^5 = 1$. $(**)$

Drar vi nu femte roten ur båda led (dvs höjer båda led till $\frac{1}{5}$) får vi att $\frac{1}{z}+1 = 1$ dvs $z = \frac{1}{0}$ som är odefinierat... dvs ingen lösning. Men $w = 1$ är bara den *reella* lösningen till $w^5 = 1$. För att få fram de komplexa lösningarna måste vi skriva talet 1 på *polär form*: $1 = 1+0i = \cos 0 + i\sin 0$. Eftersom $\cos\theta = \cos(\theta+2\pi k)$ och $\sin\theta = \sin(\theta+2\pi k)$ för alla rella tal $\theta$ och heltal $k$ (tänk på enhetscirkeln), är $1 = \cos(0+2\pi k) + i\sin(0+2\pi k) = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k)$ den mest allmänna form man kan skriva talet 1 på. Enligt de Moivres formel (s. 164) är därmed $(**)$ $((z+1)/z) = (\cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k))^{1/5}$ dvs $1 + \frac{1}{z} = \cos(\frac{2\pi k}{5}) + i\sin(\frac{2\pi k}{5})$ där $k = 0,1,2,3,4$ (se bilden överst på s. 167, där har du precis dessa tal.) dvs $\frac{1}{z} = -1 + \cos(\frac{2\pi k}{5}) + i\sin(\frac{2\pi k}{5})$ dvs $z = 1/(-1 + \cos(\frac{2\pi k}{5}) + i\sin(\frac{2\pi k}{5}))$ där $k = 0,1,2,3,4$.

Nu är vi *nästan* klara. Eftersom $k = 0$ innebär att nämnaren är $-1 + \cos(\frac{0}{5}) + i\sin(\frac{0}{5}) = 0$ ger detta att $z = \frac{1}{0}$ som ju ej var någon lösning. På samma sätt blir det med $k =$ multipel av 5. Däremot för $k = 1,2,3,4$ får vi 4 distinkta rötter (de som är inritade som $z_1, z_2, z_3, z_4$ i figuren på s. 167). För $k = 6$ får vi samma tal som för $k = 1$, för $k = 7$ samma som för $k = 2$, osv. Dvs vi får inga fler rötter än dessa 4. Därmed är svaret: $z = 1/(-1 + \cos(\frac{2\pi k}{5}) + i\sin(\frac{2\pi k}{5}))$ där $k = 1,2,3,4$.

14. Q: Hur löser man övningsuppgift 5.47 i boken?

A: Tips: Använd Pythagoras sats och att ellipsen är den figur som beskrivs av att summan av avstånden till två punkter symmetriskt kring medelpunkten (i detta fall $-1$ och $1$) är konstant (i detta fall 7). Försök nu igen innan du läser

resten av detta svar.
Först och främst vill vi veta vilka reella tal $z$ som satisfierar $|z-1|+|z+1|=7$. Om $z>1$ har vi att $7=z-1+z+1=2z \;\Rightarrow\; z=\frac{7}{2}$. Av symmetriskäl får vi att om $z<-1$ så är $z=-\frac{7}{2}$ och detta är de enda två möjligheterna om $z$ är reellt.
Om $z$ är rent imaginärt (dvs $z=bi$) måste (åter pga symmetri) avståndet till $-1$ vara lika stort som avståndet till 1. Därmed har vi en likbent triangel (rita gärna figur) med basen av längd 2 (sträckan på reella talaxeln mellan $-1$ och 1) och benen som är $\frac{7}{2}$ långa vardera. Höjden i denna triangel $h$ är då värdet på den imaginära talaxeln. Eftersom reella talaxeln och imaginära talaxeln skär varandra under rät vinkel får vi enligt Pythagoras sats: $h^2+1=(\frac{7}{2})^2 \;\Rightarrow\; h=\sqrt{\frac{49}{4}-1}=\frac{3}{2}\sqrt{5}$. Därmed är de $z\in\mathbb{C}$ som uppfyller ekvationen $|z-1|+|z+1|=7$:
$\{z:(\frac{2}{7})^2x^2+(\frac{2}{3\sqrt{5}})^2y^2=1 \text{ där } x=\operatorname{Re}z, y=\operatorname{Im}z\}=\{z:\frac{4x^2}{49}+\frac{4y^2}{45}=1 \text{ där } x=\operatorname{Re}z, y=\operatorname{Im}z\}$.
(Man kan även lösa denna uppgift mer tekniskt genom att låta $z=x+yi$ och bara räkna på men det blir väldigt risigt och tråkigt och det är ej vitsen med uppgiften så jag avböjer.)