Lösningar till Tentamen i Envariabelanalys, 5p

Distanskurs

15 januari, 2005 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.

Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 070-306 95 89)

1. Formulera och bevisa analysens huvudsats. (3p)

   Lösning: (Se kurslitteraturen, s. 296–297. Se även föreläsn.anteckningarna.) □

2. Integrera med avseende på x

   (a) $f(x) = \sin(3x)$. (3p)

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ så att $F(1) = 1$. (3p)

   Lösning:

   (a) $\int \sin(3x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 3x \\ du = 3\,dx \end{array} \right\} = \int \sin u\, \frac{1}{3}\,du = \frac{1}{3}(-\cos u) + C = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C.$

   (b) $F(x) = \int \frac{x^2+2x+2}{x+1}\,dx = \int (\frac{(x+1)^2}{x+1} + \frac{1}{x+1})\,dx = \int (x+1)\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx =$
   $= \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x+1| + C.$ $1 = F(1) = \frac{1}{2}1^2 + 1 + \ln|1+1| + C \Rightarrow C = -\frac{1}{2} - \ln 2 \Rightarrow$
   $\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x+1| - \frac{1}{2} - \ln 2$

   □

3. Beräkna gränsvärdet $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$. (3p)

   Lösning: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^n = \left\{ \begin{array}{l} k = 2n \\ n\to\infty \Rightarrow k\to\infty \end{array} \right\} = \lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k})^{k/2} =$
   $= \lim_{k\to\infty}((1+\frac{1}{k})^k)^{1/2} = \left(\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k})^k\right)^{1/2} = (e)^{1/2} = \sqrt{e}$ □

4. Beräkna längden av den kurva som beskrivs av $f(x) = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{1}{x}$ mellan $x = 1$ och $x = 2$. (3p)

   Lösning:
   Kurvlängden av f mellan $x = a$ och $x = b$ är $\int_a^b \sqrt{1+(f')^2}$.
   I detta fall är $f' = \frac{3x^2}{12} + (-1)x^{-2} = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}$ varmed

   $$\text{kurvlängden} = \int_1^2 \sqrt{1+(\tfrac{x^2}{4}-\tfrac{1}{x^2})^2}\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^2 \sqrt{1+(\tfrac{x^4}{16} - 2\cdot\tfrac{x^2}{4}\cdot\tfrac{1}{x^2} + \tfrac{1}{x^4})}\,dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{\tfrac{x^4}{16} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{x^4}}\,dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{(\tfrac{x^2}{4} + \tfrac{1}{x^2})^2}\,dx \\
&= \int_1^2 \Big(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\Big)\,dx \\
&= \Big[\frac{x^3}{3\cdot 4} + \Big(-\frac{1}{x}\Big)\Big]_1^2 \\
&= \Big(\frac{8}{12} - \frac{1}{2}\Big) - \Big(\frac{1}{12} - 1\Big) \\
&= \frac{8-6-1+12}{12} \\
&= \frac{13}{12}
\end{aligned}
$$

□

5. Skriv om och lös ekvationen

$$
y(x) \;=\; \ln(x^2+2x+1) + \int_0^{\ln(x+1)} y(e^t-1)\,dt\,, \quad x>0, \quad y(0)=-2
$$

som en första ordningens

(a) linjär differentialekvation. (3p)

(b) separabel differentialekvation. (3p)

Lösning:

Först och främst är $\ln(x^2+2x+1) = \ln(x+1)^2 = 2\ln(x+1)$ (eftersom $x>0$). Låt nu $F(x) = \int_0^x y(e^t-1)\,dt$ och $g(x) = \ln(x+1)$ så är $F(g(x)) = \int_0^{\ln(x+1)} y(e^t-1)\,dt$. Derivering av båda led i "integralekvationen" ger differentialekvationen $y'(x) = \frac{2}{x+1} + F'(g(x))g'(x) = \frac{2}{x+1} + y(e^{\ln(x+1)}-1)\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+1}\,y(x)$

(a) Ekvationen kan skrivas $y' - \frac{1}{x+1}\,y = \frac{2}{x+1}$ vilket är linjär form. Integrerande faktor är $e^{-\ln(x+1)} = \frac{1}{x+1}$ varmed $D(ye^{-\ln(x+1)}) = \frac{2}{x+1}\cdot e^{-\ln(x+1)} \Rightarrow y\,\frac{1}{x+1} = = \int \frac{2}{x+1}\cdot\frac{1}{x+1}\,dx = 2\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \left\{ \begin{array}{c} u = x+1 \\ du = dx \end{array} \right\} = 2\int \frac{du}{u^2} = 2(-\frac{1}{u}) + C = = -\frac{2}{x+1} + C \Rightarrow y = (x+1)(-\frac{2}{x+1} + C) = C(x+1) - \frac{2}{x+1}(x+1) = Cx + C - 2.$ Begynnelsevillkoret ger att $1 = y(0) = C - 2 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow y = 3x+1.$

(b) Ekvationen kan även skrivas $y' = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+1}y = (2+y)\,\frac{1}{x+1}$ dvs $y'\cdot\frac{1}{2+y} = = \frac{1}{x+1}$ vilket är separabel form. Integrering i båda led ger $\int \frac{dy}{2+y} = \int \frac{dx}{x+1}$ dvs $\ln(2+y) = \ln(x+1) + C \Rightarrow 2+y = C(x+1) \Rightarrow y = Cx + C - 2$ vilket, likt i (a)-uppgiften, med begynnelsevillkoret ger $1 = y(0) = C - 2 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow \Rightarrow y = 3x+1.$ □

6. Låt $A_0 = 0$ och $A_n = \dfrac{1}{2 - A_{n-1}^2}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

(a) Visa att $\frac{1}{2} \leq A_n \leq \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$ (3p)

(b) Visa att talföljden $\{A_n : n = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ är växande. (3p)

(c) Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$. (3p)

Lösning:

(a) Klart att $A_{n-1}^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; 2 - A_{n-1}^2 \leq 2 \;\Rightarrow\; A_n = \frac{1}{2 - A_{n-1}^2} \geq \frac{1}{2}$.
För att visa att $A_n \leq \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ kan vi göra ett induktionsbevis. Basfall: $A_1 = \frac{1}{2 - 0^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{4} - 1) < \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Ind.ant.: Antag $A_n \leq \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Ind.steg: Visa att $A_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. $A_n \leq \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \;\Rightarrow\; A_n^2 \leq$ $\leq \frac{1}{4}(5 - 2\sqrt{5} + 1) = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \;\Rightarrow\; 2 - A_n^2 \geq 2 - \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; A_{n+1} = \frac{1}{2 - A_n^2} \leq \frac{1}{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{5 - 1} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

(b) Vi ska visa att $A_{n+1} \geq A_n$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$ där $A_n \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1))$, dvs vi ska visa att $\frac{1}{2 - A_n^2} \geq A_n$, dvs att $1 \leq A_n(2 - A_n^2) = 2A_n - A_n^3$. Låt $f(x) =$ $= 2x - x^3$. Då räcker det att visa att f är växande på $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1))$ och att $f(\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)) \leq 1$. Vi har att $f'(x) = 2 - 3x^2 = 0$ då $x = \pm\sqrt{2/3}$ och $f'(x) > 0$ för $x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1))$ varmed f är (strängt) växande där. Det största värdet antar därmed f i övre intervallgränsen varmed $f(x) < f(\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)) =$ $= 2(\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)) - (\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1))^3 = \sqrt{5} - 1 - \frac{1}{8}(5\sqrt{5} - 3 \cdot 5 \cdot 1 + 3\sqrt{5} - 1) =$ $= (1 - \frac{5}{8} - \frac{3}{8})\sqrt{5} + (-1 + \frac{15}{8} + \frac{1}{8}) = 1$.

(c) Eftersom A_n är växande och uppåt begränsad är existensen av gränsvärdet $A = \lim_{n \to \infty} A_n$ garanterad. Därmed är $A = \lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2 - A_{n-1}^2} =$ $= \frac{1}{2 - (\lim_{n \to \infty} A_{n-1})^2} = \frac{1}{2 - A^2} \;\Rightarrow\; 2A - A^3 = 1$. Här ser vi att $A = 1$ är en rot. Enligt (a) är dock $A_n \leq \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) < \frac{1}{2}(\sqrt{9} - 1) = 1$ varmed 1 ej kan vara gränsvärdet A. (Detta beror på att $A_0 = 0$.) Faktoriserar vi bort $A - 1$ ur vänsterledet i ekvationen $2A - A^3 - 1 = 0$ får vi andragradaren $A^2 + A - 1 = 0$ med lösningarna $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ varav $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ är den lösning som ligger inom "räckhåll" för A_n. Gränsvärdet[1] $A = \lim_{n \to \infty} A_n$ är alltså $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

$\square$

[1]Gränsvärdet $A = \phi = 1.618\ldots$ är det vida omskrivna "Gyllene snittet" känt t ex från litteraturskatter som *Den gudomliga proportionen* av Pacoli och da Vinci, *Elementa* av Euklides och dessutom nyligen aktuellt i bestsellern *The Da Vinci code* av Brown.