TENTAMEN I ENVARIABELANALYS, 5P

Distanskurs
15 januari, 2005 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 070-306 95 89)

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna skall vara *utförligt* redovisade! Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: `http://wwww.hh.se/staff/erja` → `TEACHING` → `Matematik 1-20` → `Delkurs 2: Envariabelanalys` → `050115: lösning`

1. Formulera och bevisa analysens huvudsats. (3p)

2. Integrera med avseende på x
   (a) $f(x) = \sin(3x)$. (3p)
   (b) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ så att $F(1) = 1$. (3p)

3. Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$. (3p)

4. Beräkna längden av den kurva som beskrivs av $f(x) = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{1}{x}$ mellan $x = 1$ och $x = 2$. (3p)

5. Skriv om och lös ekvationen

$$y(x) \;=\; \ln(x^2+2x+1) + \int_0^{\ln(x+1)} y(e^t-1)\,dt\,, \quad x > 0, \quad y(0) = -2$$

   som en första ordningens
   (a) linjär differentialekvation. (3p)
   (b) separabel differentialekvation. (3p)

6. Låt $A_0 = 0$ och $A_n = \dfrac{1}{2 - A_{n-1}^2}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$
   (a) Visa att $\frac{1}{2} \le A_n \le \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$ (3p)
   (b) Visa att talföljden $\{A_n : n = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ är växande. (3p)
   (c) Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$. (3p)

LYCKA TILL!