Lösningar till Tentamen i Envariabelanalys, 5p

Distanskurs
21 augusti, 2004 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe

1. Bevisa att $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ för alla $x \neq 1$. (3p)

   Lösning:
   (Se Persson Böiers, s. 57.) □

2. Antag att f är kontinuerlig, avtagande och positiv.
   Bevisa att $f(n) + \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (3p)

   Lösning:
   (Se Persson Böiers, s. 340−341.) □

3. (a) Bestäm en primitiv funktion till $\cos^2 x \sin(2x)$. (2p)

   (b) Lös fullständigt ekvationen $\int_x^{2x} \ln y\,dy = 0$. (3p)

   Lösning:

   (a) $\int \cos^2 x \sin(2x)\,dx = 2\int \cos^3 x \sin x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x\,dx \end{array} \right\} =$
   $= -2\int u^3 du = -2 \cdot \frac{u^4}{4} + C = \underline{-\frac{1}{2}\cos^4 x + C}$

   (b) $0 = \int_x^{2x} \ln y\,dy = Fg - \int Fg' = [y \ln y]_x^{2x} - \int_x^{2x} y \cdot \frac{1}{y}\,dy = [y(\ln y - 1)]_x^{2x} =$
   $= 2x(\ln(2 \cdot x) - 1) - x(\ln x - 1) = 2x \ln 2 + 2x \ln x - 2x - x \ln x + 1 =$
   $= x(2\ln 2 + \ln x - 1)$. Trivial lösning: $x = 0$. Icke-trivial lösning:
   $2\ln 2 + \ln x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \ln x = 1 - \ln 2^2 \;\Rightarrow\; x = e^{1-\ln 4} = \frac{e}{4}$.
   <u>Svar: $x_1 = 0$ och $x_2 = e/4$.</u>

□

4. Låt $f(x) = |x|^{3/2}$ och $g(x) = 2 - |x|^{3/2}$.

(a) Beräkna arean av den yta som begränsas av graferna för f och g. (2p)

(b) Beräkna längden av ytans rand, dvs den sammanlagda längden av de kurvsegment som begränsar ytan. (3p)

Lösning:

(a) Arean $= \int_{x_0}^{x_1} (g(x) - f(x))\,dx$ där x_0 och x_1 är de två punkter där f och g skär varandra. $f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; 2|x|^{3/2} = 2 \;\Rightarrow\; x = \pm 1$.
Därmed är Arean $= \int_{-1}^{1} (g - f)\,dx = \int_{-1}^{1} (1 - 2|x|^{3/2})\,dx =$
$= 2\int_0^1 (1 - 2x^{3/2})\,dx = 2[x - 2 \cdot \frac{2}{5} x^{5/2}]_0^1 = 2(1 - \frac{4}{5} - 0) = \underline{2/5}$

(b) Kurvlängden av en funktion $h(x)$ mellan $x = a$ och $x = b$ är $\int_a^b \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,dx$.
Vi har att $f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2}$ då $x > 0$ och $g'(x) = -\frac{3}{2} x^{1/2}$ då $x > 0$. Därmed är längden av begränsningen $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (f')^2}\,dx + \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (g')^2}\,dx =$

$$= 4\int_0^1 \sqrt{1 + (\tfrac{3}{2} x^{1/2})^2}\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4} x}\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} & x = 0 \Leftrightarrow u = 1 \\ du = \frac{9/4}{2\sqrt{1 + \frac{9}{4}x}}\,dx & x = 1 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}\sqrt{13} \end{array} \right\} = 4\int_1^{\sqrt{13}/2} u \cdot \frac{2u}{9/4}\,du =$$

$$= 4 \cdot 2 \cdot \frac{4}{9} \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^{\frac{1}{2}\sqrt{13}} = \frac{32}{27}\left(\frac{13^{3/2}}{8} - 1\right) = \underline{\frac{4}{27}(13^{3/2} - 8)} \quad (\approx 5.76)$$

□

5. (a) Beräkna $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. (2p)

(b) Visa att $f(x) = x^{a-1}/(x-1)^a$ är strängt avtagande på $(1, \infty)$ för alla $a > 1$. (3p)

(c) Givet resultatet i (b), beräkna $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \frac{x^{a-1}}{(x-1)^a}\,dx$ där $a > 1$. (3p)

Lösning:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$
(Denna typ av serie brukar kallas "teleskopserie" för att den kollapsar likt ett teleskop.)

(b) Ska visa $f'(x) < 0$ för $x > 1$ och $a > 1$. $f'(x) = \frac{(a-1)x^{a-2}(x-1)^a - x^{a-1}a(x-1)^{a-1}}{(x-1)^{2a}}$.
Räcker visa att $(a-1)x^{a-2}(x-1)^a < x^{a-1}a(x-1)^{a-1}$ ty nämnaren strängt positiv. Men olikheten är $\frac{a-1}{a} \cdot \frac{(x-1)^a}{(x-1)^{a-1}} < \frac{x^{a-1}}{x^{a-2}}$ dvs $(1 - \frac{1}{a})(x - 1) < x$ dvs $-\frac{x}{a} - 1 + \frac{1}{a} < 0$. Eftersom $x > 1$ och a är positivt, är $-\frac{x}{a} < -\frac{1}{a}$ varmed $-\frac{x}{a} - 1 + \frac{1}{a} < -\frac{x}{a} + \frac{1}{a} < 0$. Klart!

(c) Enligt integralkalkylens medelvärdessats är $\int\limits_n^{n+1} \frac{x^{a-1}}{(x-1)^a}\,dx =$
$= \frac{c^{a-1}}{(c-1)^a} \cdot (n+1-n)$ där $c \in [n, n+1]$. Men på samma sätt har vi även att $\int\limits_{n+1}^{n+2} \frac{x^{a-1}}{(x-1)^a}\,dx = \frac{c^{a-1}}{(c-1)^a} \cdot (n+2-n-1) = \frac{c^{a-1}}{(c-1)^a}$ för något $c \in [n+1, n+2]$.
Eftersom f positiv och (enligt (a)) strängt avtagande för alla $x \in (1, \infty)$ är därmed $f(c) < f(n+1) = \frac{(n+1)^{a-1}}{n^a}$ varmed $0 \leq \int\limits_{n+1}^{n+2} \frac{x^{a-1}}{(x-1)^a}\,dx =$
$= \frac{c^{a-1}}{(c-1)^a}$ $\{$där $c \in [n+1, n+2]\}$ $= f(c) \leq f(n+1) = \frac{(n+1)^{a-1}}{n^a} =$
$= \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{(1+\frac{1}{n})^{a-1}}_{\to 1} \to 0$, dvs $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_n^{n+1} \frac{x^{a-1}}{(x-1)^a}\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{n+1}^{n+2} \frac{x^{a-1}}{(x-1)^a}\,dx = 0.$ $\square$

6. Lös begynnelsevärdesproblemet $y^2 + y' = 1$ där $y > 1$ och $y(0) = \frac{e+1}{e-1}$. (3p)

Lösning:
$y^2 - 1 = y' \;\Rightarrow\; y' \cdot \frac{1}{y^2-1} = 1$. Detta är en separabel diff-ekvation med $g(y) =$
$= \frac{1}{y^2-1}$ och $h(x) = 1$. Vi får att $G(y) = \int \frac{dy}{(y-1)(y+1)}\,dy = \{\text{Partialbråksuppdeln.}\} =$
$= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y+1} = \frac{1}{2}(\ln|y-1| - \ln|y+1|) + C = \ln\sqrt{\frac{y-1}{y+1}} + C$ och $H(x) = x$. Därmed får vi att $\ln\sqrt{\frac{y-1}{y+1}} = x - C$ dvs $\frac{y-1}{y+1} = e^{(x-C)^2}$. Vi vill lösa ut y i vänterledet och skriver det därför som $\frac{y+1-2}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1}$ varmed $\frac{2}{y+1} = 1 - e^{(x-C)^2}$ dvs $y = \frac{2}{1-e^{(x-C)^2}} - 1 = \frac{1+e^{(x-C)^2}}{1-e^{(x-C)^2}}$. Begynnelsevillkoret ger nu att $\frac{e+1}{e-1} = y(0) = \frac{1+e^{C^2}}{1-e^{C^2}} \;\Rightarrow\; C^2 = 1 \;\Rightarrow\; C = \pm 1$. Därmed har diff-ekvationen lösningarna $\underline{y_1(x) = \frac{1+e^{(x-1)^2}}{1-e^{(x-1)^2}} \text{ och } y_2(x) = \frac{1+e^{(x+1)^2}}{1-e^{(x+1)^2}}}$ $\square$

7. Beräkna $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(2n)^{k-n}$. (3p)

Lösning:
Enligt binomialsatsen har vi att $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(2n)^{k-n} = \frac{1}{(2n)^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(2n)^k =$
$= \frac{1}{(2n)^n}(2n+1)^n = (\frac{2n+1}{2n})^n = (1+\frac{1}{2n})^n$. Därmed är $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(2n)^{k-n} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^n = \{m = 2n\} = \lim\limits_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^{m/2} = \lim\limits_{m\to\infty}\Big(\underbrace{(1+\frac{1}{m})^m}_{\to e}\Big)^{1/2} =$
$= e^{1/2} = \sqrt{e}.$ $\square$