Lösningar till Tentamen i Envariabelanalys, 5p

Distanskurs
24 mars, 2005 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 070-306 95 89)

1. Antag att $\alpha > 0$. Bevisa att $x^\alpha / \ln x \to \infty$ då $x \to \infty$. (3p)

   Lösning: (Se *Analys i en variabel* av Persson & Böiers, s. 81–82.) □

2. Bevisa att alla kontinuerliga funktioner är integrerbara på slutna och begränsade intervall. (3p)

   Lösning: (Se *Analys i en variabel* av Persson & Böiers, s. 288–289.) □

3. Lös ekvationen $\sin 2x + 2\sin x + 2\sin^2 x = 0$. (3p)

   Lösning: $\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}$. Låt nu $t = \sin x$. Då är ekvationen $2t\sqrt{1-t^2} + 2t + 2t^2 = 0$. Här är en lösning $t_1 = 0$. Återstår: $2\sqrt{1-t^2} + 2 + 2t = 0$ dvs $\sqrt{1-t^2} = -1-t$. Kvadrering (obs! $1-t^2 \geq 0$) ger $1-t^2 = (-1-t^2)^2 = 1 + 2t + t^2$ dvs $2t^2 + 2t = 0$. Återigen är en rot $t_2 = 0$ varmed återstående endast är $2t + 2 = 0$ med roten $t_3 = -1$. Detta innebär för x:
   $0 = t = \sin x \;\Rightarrow\; x = \pi n$ där $n \in \mathbb{Z}$
   $-1 = t = \sin x \;\Rightarrow\; x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ där $n \in \mathbb{Z}$.
   Alltså är lösningsmängden $\{\pi n,\ \pi(\frac{3}{2} + 2n) : n \in \mathbb{Z}\}$. □

4. Låt
$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$$
   (a) Bestäm maximal definitionsmängd för f. (1p)
   (b) Beräkna alla asymptoter till f. (2p)
   (c) Beräkna alla minima och maxima för f. (2p)

   Lösning:

   (a) f är odefinierad då nämnaren $x+1 = 0$, dvs i $x = -1$. För övrigt är f definierad för alla reella tal. Därmed är $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

(b) $\lim\limits_{x\to-1-}\frac{x^2+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1-}\frac{x^2-1+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1-}(\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}+\frac{2}{x+1})=\lim\limits_{x\to-1-}(x-1+\frac{2}{x+1})=$
$=\lim\limits_{x\to-1-}(-2+\frac{2}{x+1}) = \left\{\begin{array}{l} y=x+1 \\ y\to 0- \end{array}\right\} = \lim\limits_{y\to 0-}(-2+\frac{2}{y}) = \left\{\begin{array}{l} z=-y \\ z\to 0+ \end{array}\right\} =$
$=\lim\limits_{z\to 0+}(-2-\frac{2}{z})=-\infty.$ $(*)$.
$\lim\limits_{x\to-1+}\frac{x^2+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1+}(-2+\frac{2}{x+1})=\lim\limits_{y\to 0+}(-2+\frac{2}{y})=+\infty.$ $(**)$
Därmed är det klart att f har en vertikal asymptot i $x=-1$. Dessutom har f en sned asymptot eftersom $f=x-1+\frac{2}{x+1}$ som avtar mot $-\infty$ som $x-1$ då $x\to-\infty$ och växer mot $+\infty$ som $x-1$ då $x\to+\infty$. Alltså är asymptoten $x-1$ vilket formellt visas:
$f-(x-1)=\frac{x^2+1}{x+1}-(x-1)=\frac{x^2+1-(x-1)(x+1)}{x+1}=\frac{2}{x+1}\to 0$ då $x\to\pm\infty$.
Sammanlagt är asymptoterna till f: $x=0$ och $y=x-1$.

(c) $f'=\frac{2x(x+1)-(x^2+1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-2}{(x+1)^2}=1-\frac{2}{(x+1)^2}$.
Nollställen:
$f'=0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^2}=1 \Leftrightarrow (x+1)^2=2 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1$ eller $x=-\sqrt{2}-1$.
Teckenstudie:

x	$\to-\infty$	$-\sqrt{2}-1$	$\to-1-$	$\to-1+$	$\to\sqrt{2}-1$	$\to+\infty$
f'	$\to+1$	0	$\to-\infty$ $(*)$	$\to+\infty$ $(**)$	0	$\to+1$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Alltså: f har ett lokalt max i $(-\sqrt{2}-1,-2\sqrt{2}-2)$, ett lokalt min i $(\sqrt{2}-1,2\sqrt{2}-2)$ och inga globala extrempunkter.

Det kan verka ologiskt att f har ett max som är mindre än dess min men detta har att göra med singulariteten i $x=-1$. □

5. Beräkna $\int_0^1 x\ln(x+1)\,dx$. (3p)

Lösning: $\int x\ln(x+1)\,dx = \left\{\begin{array}{ll} g=\ln(x+1) & f=x \\ g'=1/(x+1) & F=x^2/2 \end{array}\right\} = Fg-\int Fg' =$
$=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x+1)-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\,dx = \left\{\begin{array}{l} u=x+1 \\ du=dx \end{array}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{(u-1)^2}{u} =$
$=\frac{1}{2}(x^2\ln(x+1)-\int(u-2+\frac{1}{u})\,du) = \frac{1}{2}(x^2\ln(x+1)-(\frac{u^2}{2}-2u+\ln|u|)) =$
$=\frac{1}{2}((x^2+1)\ln(x+1)-\frac{(x+1)^2}{2}+2(x+1))$ (sånär som på additiv konstant).
Därmed är $\int_0^1 x\ln(x+1)\,dx = \frac{1}{2}[(x^2+1)\ln(x+1)-\frac{(x+1)^2}{2}+2(x+1)]_0^1 =$
$=\frac{1}{2}(((1+1)\ln 2-\frac{2^2}{2}+2\cdot 2)-((0+1)\ln 1-\frac{1}{2}+2))=\frac{1}{4}+\ln 2.$ □

6. Lös begynnelsevärdesproblemet $y''+y'-2y=x^2+x-2$, $y(0)=-y'(0)=5$. (3p)

Lösning: Homogena ekvationen: $y''+y'-2y=0$.
Karakteristisk ekvation $r^2+r-2=0$ med lösning $r=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}$,
dvs $r_1=1$ och $r_2=-2$ varmed $y_h=Ae^x+Be^{-2x}$.

Partikulärlösning:
Ansätt $y_p = ax^2 + bx + c$
$\Rightarrow\ y_p' = 2ax + b,\ y_p'' = 2a$
$\Rightarrow\ y_p'' + y_p' - 2y_p = 2a + 2ax + b - 2(ax^2 + bx + c) = -2ax^2 + (2a - 2b)x + (2a + b - 2c).$
Detta ska vara lika med $x^2 + x - 2$ för alla $x \in \mathbb{R}$ vilket innebär att
$-2a = 1 \ \Rightarrow\ a = -\frac{1}{2}$
$2a - 2b = 1 \ \Rightarrow\ b = -\frac{1}{2}(1 - 2(-\frac{1}{2})) = -1$
$2a + b - 2c = -2 \ \Rightarrow\ c = -\frac{1}{2}(-2 - 2(-\frac{1}{2}) - (-1)) = 0$
$\Rightarrow\ y_p = -\frac{1}{2}x^2 - x \ \Rightarrow\ y = y_h + y_p = Ae^x + Be^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 - x.$
Detta innebär att $y' = Ae^x - 2Be^{-2x} - x - 1$.
Begynnelesevillkoren ger därmed värdet på A respektive B:
$5 = y(0) = A + B$ och $-5 = y'(0) = A - 2B - 1$
$\Rightarrow\ 5 - (-5) = y(0) - y'(0) = B - (-2B - 1) = 3B + 1 \ \Rightarrow\ B = 3 \ \Rightarrow\ A = 5 - 3 = 2$
varmed slutligen den fullständiga lösningen är $y = 2e^x + 3e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 - x$. $\square$

7. En bonde har köpt 333 meter staket för att inhägna en hage intill ett berg. Enligt landskapsarkitekten måste hagen ha formen av en rätvinklig triangel. Djurskyddföreningen vill att hagens yta ska vara maximal och för att gå dem tillmötes tänker bonden låta bergväggen utgöra ena kateten i triangeln. Hur stor kan hagen bli då? (3p)

Lösning: Antag att triangeln har sidorna a, b, c där c är hypotenusan. Eftersom den är rätvinklig har vi enligt Pythagoras sats att $a^2 + b^2 = c^2$. Dessutom är $a + c = 333$ och triangelarean är $\frac{ab}{2}$. För att utnyttja Pythagoras sats kan man skriva $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ t.ex. men det blir bökigt att blanda in rotuttryck då vi ska derivera senare. Istället kan man kvadrera $c = 333 - a$ vilket ger $c^2 = 333^2 - 666a + a^2$
$\Rightarrow\ 333^2 - 666a + a^2 = a^2 + b^2 \ \Rightarrow\ 333^2 - 666a = b^2$
$\Rightarrow\ a = \frac{333}{2} - \frac{b^2}{666}$
$\Rightarrow$ Arean $= A = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}(333b - \frac{1}{333}b^3)$
Därmed har vi lyckats uttrycka arean, A, som en funktion av b. För att finna maximal area deriverar vi:
$A'(b) = \frac{1}{4}(333 - \frac{3}{333}b^2) = 0$
$\Rightarrow\ b^2 = \frac{333}{4} \cdot \frac{4 \cdot 333}{3} = 333 \cdot 111$
$\Rightarrow\ b = \sqrt{3 \cdot 111 \cdot 111} = 111\sqrt{3}$ (endast positiva roten intressant.)
Att detta verkligen är ett max kontrolleras:

b	111	$111\sqrt{3}$	222
A'	$+\frac{111}{2}$	0	$-\frac{111}{4}$
A	$\nearrow$	max	$\searrow$

Alltså är den maximala arean $A(111\sqrt{3}) = \frac{1}{4}(333 \cdot 111\sqrt{3} - \frac{1}{333}(111\sqrt{3})^3) =$
$= \frac{1}{4}(111^2 3\sqrt{3} - \frac{111 \cdot 3 \cdot 111^2\sqrt{3}}{333}) = \frac{(3-1)\sqrt{3} \cdot 111^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}111^2.$ $\square$

8. Tvärsnittsytan av ett ägg kan beskrivas m.h.a. kurvorna $x^2 + y^2 = 1$ och $x^2 + y = a$ om a väljs så att övergången mellan de båda kurvorna blir jämn.

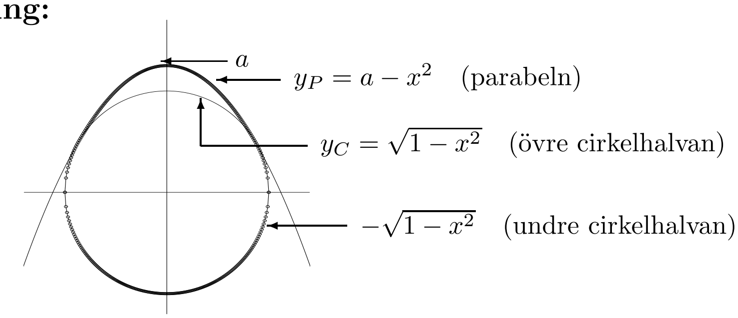
   (a) Rita kurvorna (med tvärnittsytan av ägget) i ett koordinatsystem. (1p)

   (b) Beräkna värdet på a. (3p)

   (c) Beräkna äggets tvärsnittsarea. (3p)

Lösning:

(a)



(b) Övre cirkelhalvan beskrivs av $y_C = \sqrt{1-x^2}$ och parabeln av $y_P = a - x^2$ där a reglerar parabelns läge i höjdled. För att övergången mellan kurvorna ska bli jämn måste kurvornas tangenter vara lika i respektive skärningspunkt. $y'_C = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ och $y'_P = -2x$ varmed $y'_C = y'_P$ då $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -2x$. Eftersom inte $x = 0$ är en användbar lösning fortsätter vi: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \Rightarrow 2\sqrt{1-x^2} = 1 \Rightarrow 4(1-x^2) = 1 \Rightarrow 1 - x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Detta innebär att $y = y_C(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = y_P(\frac{\sqrt{2}}{2}) = a - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = a - \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{5}{4}$.

(c) För att beräkna tvärsnittsarean kan man antingen integrera längs y-axeln eller vrida y_P ett kvarts varv så att ägget pekar åt sidan symmetriskt över x-axeln istället. Jag väljer här att göra på det senare sättet dvs vrida y_P. Den kurva som motsvarar y_P vriden ett kvarts varv medsols är just inversen y_P^{-1}. Emellertid kan vi nöja oss med att invertera y_P för positiva x (högra halvan av y_P alltså) eftersom hela y_P inte är injektiv och därmed inte inverterbar. (Eftersom vi kan utnyttja symmetrin innebär dock inte detta något stort problem.) Vi får

$y_P = a - x^2, x > 0 \Rightarrow x = a - (y_P^{-1})^2, y_P^{-1} > 0 \Rightarrow (y_P^{-1})^2 = a - x, y_P^{-1} > 0$
$\Rightarrow y_P^{-1} = \sqrt{a-x}$. Vi ska nu beräkna tvärsnittsarean

$A = 2\underbrace{\int_{-1}^{1/2} y_C(x)\,dx}_{I} + 2\underbrace{\int_{1/2}^{5/4} y_P^{-1}(x)\,dx}_{II}$. Vi får

$$I = \int_{-1}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} x = \sin\theta & x = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \\ dx = \cos\theta\,d\theta & x = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \end{array} \right\} =$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/6} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/6} \cos^2\theta\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/6} \frac{1}{2}(\cos(2\theta) + 1)\,d\theta =$$
$$= \frac{1}{2}[\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta]_{-\pi/2}^{\pi/6} = \frac{1}{2}(\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sin(-\pi)}{2} + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{2\pi}{3} - 0) = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{3}$$
$$II = \int_{1/2}^{5/4} \sqrt{\frac{5}{4} - x}\,dx = \int_{1/2}^{5/4} (\frac{5}{4} - x)^{1/2} dx = [-\frac{(\frac{5}{4}-x)^{3/2}}{3/2}]_{1/2}^{5/4} =$$
$$= -\frac{(\frac{5}{4}-\frac{5}{4})^{3/2}}{3/2} + \frac{(\frac{5}{4}-\frac{1}{2})^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \cdot (\frac{3}{4})^{3/2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$A = 2I + 2II = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{2\pi}{3}.$$

□