Lösningar till tentamen i Envariabelanalys, 5p

Distanskurs
6 juni, 2003 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe

1. Formulera och bevisa medelvärdessatsen. (3p)

   Lösning:
   (Se Persson-Böiers, s. 202−203) □

2. Bevisa att om a, b konstanter, y_h lösning av den homogena ekvationen $y'' + ay' + by = 0$ och y_p en partikulärlösning till $y'' + ay' + by = h$ så är $y = y_h + y_p$ den allmänna lösningen av $y'' + ay' + by = h$. (3p)

   Lösning:
   (Se Persson-Böiers, s. 376) □

3. Bestäm samtliga asymptoter till $g(x) = \dfrac{1 + e^x(1 + x)}{x(1 + e^x)}$, $x \in \mathbb{R}$ (3p)

   Lösning:
   Uppenbarligen är $g(x)$ ej kontinuerlig i $x = 0$ vilket nödgar närmare inspektion. Låt oss först skriva $g(x)$ som

$$g(x) = \frac{1 + e^x + xe^x}{x(1 + e^x)} = \frac{1 + e^x}{x(1 + e^x)} + \frac{xe^x}{x(1 + e^x)} = \frac{1}{x} + \frac{e^x}{1 + e^x}$$

Då har vi att

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty} + \underbrace{\frac{e^x}{1 + e^x}}_{\to 1/2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0-} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to -\infty} + \underbrace{\frac{e^x}{1 + e^x}}_{\to 1/2} = -\infty$$

Detta innebär att linjen $x = 0$ (dvs y-axeln) är en asymptot då $x \to 0+$ respektive $x \to 0-$. Vidare kollas vad som händer då $x \to \pm\infty$:
Då $x \to -\infty$ är $e^x \to 0$ så $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{e^x}{1+e^x} \to 0 + \frac{0}{1+0} = 0$ då $x \to -\infty$ varmed linjen $y = 0$ (dvs x-axeln) är en asymptot då $x \to -\infty$.
Då $x \to +\infty$ har vi att $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{e^{-x}+1} \to 0 + \frac{1}{0+1} = 1$ då $x \to +\infty$ dvs linjen $y = 1$ är asymptot då $x \to \infty$. □

4. Beräkna $\quad$ (a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+2x}\,dx,\ x>0$ $\quad$ (2p) $\qquad$ (b) $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2 dx$ $\quad$ (2p)

Lösning:

(a) $I = \int \frac{2x+1}{x^2+2x}\,dx = \underbrace{\displaystyle\int \frac{2x+2}{x^2+2}\,dx}_{I_1} - \underbrace{\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x}\,dx}_{I_2}$

$I_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} u & = & x^2+2x \\ du & = & 2x+2 \end{array} \right\} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|x^2+2x|$

$I_2 = \int \frac{dx}{x(x+2)} = \int (\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2})\,dx = \int \frac{(A+B)x+2A}{x(x+2)}\,dx = \left\{ \begin{array}{cc} A+B=0 & A=\frac{1}{2} \\ 2A=1 & B=-\frac{1}{2} \end{array} \right\} =$

$= \int \frac{dx}{2x} - \int \frac{dx}{2(x+2)} = \frac{1}{2}\ln|2x| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| = \ln\sqrt{\frac{2x}{2x+4}}$

$I = I_1 - I_2 = \ln(x^2+2x) - \ln\sqrt{\frac{2x}{2x+4}} + C = \ln\left(x(x+2)\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right) + C =$

$= \ln\left(x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot(x+1)\sqrt{x+2}\right) + C = \underline{\frac{1}{2}\ln(x(x+2)^3) + C}$

(b) $I = \int (\ln x)^2 dx = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Partiell integration} & \\ f=1 & F=x \\ g=(\ln x)^2 & g'=2(\ln x)\frac{1}{x} \end{array} \right\} = x(\ln x)^2 - \underbrace{\int x\,2(\ln x)\,\frac{1}{x}\,dx}_{I_2}$

$I_2 = 2\int \ln x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Partiell integration} & \\ f=1 & F=x \\ g=\ln x & g'=\frac{1}{x} \end{array} \right\} = 2(x\ln x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx) = 2(x\ln x - x)$

$I = x(\ln x)^2 - I_2 = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$

$\int_1^e (\ln x)^2 dx = \Big[x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x\Big]_1^e =$

$= (e\cdot 1^2 - 2e\cdot 1 + 2e) - (1\cdot 0^2 - 2\cdot 1\cdot 0 + 2) = \underline{e-2}$

$\square$

5. Lös begynnelsevärdesproblemet $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2x+1} - y' = y'y \\ y(0)=1, \quad x\geq 0 \end{array} \right.$ (3p)

Lösning:

$y'(y+1) = \frac{1}{2x+1}$ (Separabel med $g(y) = y+1$ och $h(x) = \frac{1}{2x+1}$
så $y'g(y) = h(x) \ \Rightarrow\ G(y) = H(x)$)

$G(y) = \int (1+y)\,dy = y + \frac{y^2}{2} + C \quad H(x) = \int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$

$G(y) = H(x) \ \Leftrightarrow\ y + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$

$\Rightarrow\ y^2 + 2y - (\ln|2x+1| + C) = 0 \ \Rightarrow\ y = -1 \pm \sqrt{1+\ln|2x+1|+C}$

$1 = y(0) = -1 \pm \sqrt{1+\ln|0+1|+C} \ \Rightarrow\ C = 3$

$\underline{y = -1 + \sqrt{4+\ln(2x+1)}}$ (eftersom $x \geq 0$). $\square$

6. Visa att $e^{-x}\ln(x+1) < x$ för $x > 0$. (3p)

Lösning:
a. Först visar vi att $\ln(x+1) < x$ för $x > 0$.
b. Sedan att $e^{-x} < 1$ för $x > 0$.
c. Då är $e^{-x}\ln(x+1) < xe^{-x} < x$ och därmed påståendet bevisat!

a. $D(\ln(x+1) - x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{x+1} < 0$ för alla $x > 0$. Eftersom $\ln(0+1) - 0 = 0$ så är därmed $\ln(x+1) - x < 0$ då $x > 0$.

b. Eftersom $D(e^{-x}) = -e^{-x} < 0$ för alla $x > 0$ så är e^{-x} avtagande dvs $\max\limits_{x\geq 0} e^{-x} = e^0 = 1$ och därmed $e^{-x} < 1$ för $x > 0$.

$\square$

7. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{31}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^j > 60.$ (3p)

Lösning:
$\sum_{k=1}^{31}\sum_{j=0}^{k-1}(\frac{1}{2})^j = \sum_{k=1}^{31}\frac{1-(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}} = 2(31-\sum_{k=1}^{31}(\frac{1}{2})^k) = 62-2(\sum_{k=0}^{31}(\frac{1}{2})^k - 1) =$
$= 62 - 2\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^{31+1}}{1-\frac{1}{2}} + 2 = 64 - 4(1-(\frac{1}{2})^{32}) = 60 + (\frac{1}{2})^{30} > 60$ $\square$

8. Pelle häller filmjölk i en skål formad som en halvsfär. Om han slutar hälla då "filmjölksdjupet" är $\frac{3}{4}$ dm, hur stor andel av skålen är då fylld?
(Tips: Enhetscirkeln beskrivs av $\pm\sqrt{1-x^2}$.) (3p)

Lösning:
För att beräkna volymen, V, av skålen och dess relation med med höjden, h, dvs "filmjl̈ksdjupet", låt oss studera rotationsvolymen av $\sqrt{1-x^2}$ då $x > 0$ (roterad kring x-axeln). Att "filmjölksdjupet" växer från 0 mot 1 motsvaras då av att x avtar från 1 mot 0 (rita gärna figur!). Vi har att
$F(x) = \int_x^1 \pi(\sqrt{1-t^2})^2 dt = \pi\int_x^1(1-t^2)\,dt = \pi\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_x^1 = \pi((1-\frac{1}{3})-(x-\frac{x^3}{3})) =$
$= \frac{\pi}{3}(x^3-3x+2)$. Eftersom filmjölksdjupet, h, är $1-x$ så är volymen filmjölk i skålen $V(h) = F(1-h) = \frac{\pi}{3}((1-h)^3 - 3(1-h)+2) = \frac{\pi}{3}(3h^2-h^3) =$
$= \pi h^2(1-\frac{h}{3})$. Om nu $h = \frac{3}{4}$ dm har vi att volymen är $V(\frac{3}{4}) = \pi\cdot\frac{9}{16}(1-\frac{1}{4}) = \frac{27\pi}{64}$.
Eftersom den totala volymen i skålen är $V(1) = \frac{\pi\cdot 1}{3}(1-\frac{1}{3}) = \frac{2\pi}{3}$ så är andelen filmjölk $\frac{27\pi}{64}\cdot\frac{3}{2\pi} = \underline{\underline{\frac{81}{128}}}$. $\square$

9. Låt $f(x) = \int_0^x \arctan(2y)\,dy$.

(a) Beräkna $f(\frac{1}{2})$. (3p)

(b) Visa att $f(x) < x^2$ då $x > 0$. (2p)

Lösning:

(a) Låt oss först beräkna den primitiva funktionen till $\arctan(2y)$:

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{1}_{f} \cdot \underbrace{\arctan(2y)}_{g} &= Fg - \textstyle\int Fg' \\
&= y\arctan(2y) - \int y\,\frac{2}{1+(2y)^2}\,dy \\
&= y\arctan(2y) - \frac{1}{4}\int \frac{8y}{1+4y^2}\,dy \\
&= \left\{ \begin{array}{lcl} u &=& 4y^2 \\ du &=& 8y\,dy \end{array} \right\} \\
&= y\arctan(2y) - \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+u}\,du \\
&= y\arctan(2y) - \tfrac{1}{4}\ln|1+u| \\
&= y\arctan(2y) - \tfrac{1}{4}\ln(1+4y^2)
\end{aligned}$$

Därmed är

$$\begin{aligned}
f(\tfrac{1}{2}) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \arctan(2y)\,dy \\
&= \left[y\arctan(2y) - \tfrac{1}{4}\ln(1+4y^2)\right]_0^{1/2} \\
&= \left(\tfrac{1}{2}\arctan(2\cdot\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{4}\ln(1+4\cdot(\tfrac{1}{2})^2)\right) - \left(0\cdot\arctan(0) - \tfrac{1}{4}\ln(1+0)\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\ln 2 - 0 \\
&= \frac{\sqrt{2}-\ln 2}{4}
\end{aligned}$$

(b) Låt $g(x) = x^2$. Ska visa $f(x) < g(x)$ då $x > 0$.
Eftersom $f(0) = 0\cdot\arctan(0) - \frac{1}{4}\ln(1)$ och $g(0) = 0^2 = 0$ är $f(0) = g(0)$. För att visa att $f(x) < g(x)$ för $x > 0$, räcker det visa att $g(x)$ växer snabbare än $f(x)$ för $x > 0$, dvs det räcker visa att $f'(x) < g'(x)$ då $x > 0$.

Emellertid, eftersom $f'(0) = \arctan(0) = 0$ och $g(0) = 0$ är även $f'(0) = g'(0)$ så, på samma sätt som förut, räcker det därför visa att $f''(x) < g''(x)$ då $x > 0$. Men

$$f''(x) = \frac{2}{1+(2x)^2} < \frac{2}{1+0} = 2 = g''(x)$$

då $x > 0$, vilket skulle bevisas. □