

TENTAMEN I ENVARIABELANALYS, 5P

Distanskurs

21 augusti, 2004 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser:** 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel:** Inga.

Kursansvarig: Eric Järpe

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna skall vara *utförligt* redovisade! Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: <http://www2.hh.se/staff/erja> → TEACHING → Envariabelanalys → 030818: lösning

1. Bevisa att $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ för alla $x \neq 1$. (3p)

2. Antag att f är kontinuerlig, avtagande och positiv.
Bevisa att $f(n) + \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (3p)

3. (a) Bestäm en primitiv funktion till $\cos^2 x \sin(2x)$. (2p)

(b) Lös fullständigt ekvationen $\int_x^{2x} \ln y dy = 0$. (3p)

4. Låt $f(x) = |x|^{3/2}$ och $g(x) = 2 - |x|^{3/2}$.

(a) Beräkna arean av den yta som begränsas av graferna för f och g . (2p)

(b) Beräkna längden av ytans rand, dvs den sammanlagda längden av de kurvsegment som begränsar ytan. (3p)

5. (a) Beräkna $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. (2p)

(b) Visa att $f(x) = x^{a-1}/(x-1)^a$ är strängt avtagande på $(1, \infty)$ för alla $a > 1$. (3p)

(c) Givet resultatet i (b), beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} \frac{x^{a-1}}{(x-1)^a} dx$ där $a > 1$. (3p)

6. Lös begynnelsevärdesproblemet $y^2 + y' = 1$ där $y > 1$ och $y(0) = \frac{e+1}{e-1}$. (3p)

7. Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2n)^{k-n}$. (3p)

LYCKA TILL!