Lösningar till Tentamen i Envariabelanalys

Distanskurs
11 januari, 2003 kl. 9.00 – 13.00

1. Vad är minimum och maximum av funktionen
$f(x) = 1 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{54}x^3$ på intervallet $[-10, 10]$? (3p)

Lösning

$f' = -\frac{3}{2} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{18}x^2$

$$f' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x - 27 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \pm \sqrt{9+27} = \begin{cases} 9 \\ -3 \end{cases}$$

Teckenstudium:

x	-10	-3	0	9	10
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$
	$= -\frac{518}{27}$	$= 7/2$	$= 1$	$= -25/2$	$= -\frac{328}{27}$

där $f(-10)$ och $f(10)$ beräknats enligt:

$f(-10) = 1 + \frac{30}{2} - \frac{100}{6} - \frac{1000}{54} = 16 - 16\frac{2}{3} - \frac{500}{27} = -\frac{518}{27}$

$f(10) = 1 - \frac{30}{2} - \frac{100}{6} + \frac{1000}{54} = -30\frac{18}{27} + \frac{500}{27} = -\frac{328}{27}$

Eftersom $f(-10) = -\frac{518}{27} < -\frac{2 \cdot 10 \cdot 27 - 27}{27} = -19 < -12.5 = f(9)$ så har f minimum i $(-10, -\frac{518}{27})$ och maximum i $(-3, \frac{7}{2})$. □

2. Derivera med avseende på x

(a) $(a + x^2)^2$ (1p)

(b) $\ln(\frac{\ln x}{x})$ (2p)

Lösning

(a) Mha kedjeregeln har vi att
$D((a + x^2)^2) = 2(a + x^2) \cdot 2x = \boxed{4x(a + x^2)}$
Alternativt kan man istället först utveckla kvadraten
$(a + x^2)^2 = a^2 + 2ax^2 + x^4$ och sedan derivera
$D(a^2 + 2ax^2 + x^4) = 2 \cdot 2ax + 4x^3 = \boxed{4ax + 4x^3}$

(b) Enligt kedjeregeln är
$$D(\ln(\tfrac{\ln x}{x})) = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{x(1 - \ln x)}{x^2 \ln x} = \frac{1 - \ln x}{x \ln x} = \boxed{\frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{x}}$$

□

3. Härled från definitionen av derivata att $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$. (3p)
(Tips: Utnyttja att $\cos 2\beta - \cos 2\alpha = 2\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$.)

Lösning

$$\frac{d}{dx}\cos x = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \left\{ \begin{array}{lll} 2\beta = x+h & \beta = \frac{x+h}{2} & \alpha+\beta = x+\frac{h}{2} \\ 2\alpha = x & \alpha = \frac{x}{2} & \alpha-\beta = -\frac{h}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\sin(x+\frac{h}{2})\sin(-\frac{h}{2})}{h} = \{h = 2k\} = \lim_{k \to 0} \frac{2\sin(x+k)(-\sin k)}{2k} = -\lim_{k \to 0} \underbrace{\sin(x+k)}_{\to \sin x} \underbrace{\frac{\sin k}{k}}_{\to 1} = -\sin x$$

□

4. Beräkna $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\cos 2x\,dx.$ (3p)

Lösning
$\int x\cos 2x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} g = x & f = \cos 2x\,dx \\ g' = dx & F = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right\} = \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx =$
$= \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(-\cos 2x)) + C = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C \;\Rightarrow$
$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos 2x\,dx = \left[\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right]_{-\pi}^{\pi} =$
$= \frac{\pi}{2}\sin 2\pi + \frac{1}{4}\cos 2\pi - \frac{-\pi}{2}\sin(-2\pi) - \frac{1}{4}\cos(-2\pi) = 0 + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{4} = 0$ $\square$

5. Visa att $\displaystyle\pi \leq \int_0^{\pi} 2^{\sin x} dx \leq 2\pi.$ (3p)

Lösning
På $(0,\pi)$ är $0 \leq \sin x \leq 1$ varmed $1 = 2^0 \leq 2^{\sin x} \leq 2^1 = 2$
och därmed slutligen $\pi = 1\cdot(\pi - 0) \leq \int_0^{\pi} 2^{\sin x} dx \leq 2(\pi - 0) = 2\pi.$ $\square$

6. Under ett regnväder samlas vatten upp i en konisk tank med 1.2 m i diameter vid öppningen och höjden 2.5 m. Regnet faller ned med 4 mm/timme, dvs på en vågrät yta skulle vattenhöjden på en timme öka med 4 mm. Med vilken hastighet höjer sig vattennivån i tanken när vattnets höjd i tanken är 1.5 m? (3p)

Lösning Låt t beteckna tiden, $V(t)$ = mängden vatten i tanken, $h(t)$ = vattenhöjden, $r(t)$ = vattenytans radie. Konens volym är $V(t) = \frac{1}{3}\pi r^2(t)h(t)$. Likformighet ger

$$\frac{r(t)}{1.2/2} = \frac{h(t)}{2.5} \quad\Rightarrow\quad V(t) = \tfrac{1}{3}\pi r^2(t) 2.5\tfrac{r(t)}{0.6} = \tfrac{12}{625}\pi h(t)^3$$

Volymökningstakten är konstant varmed $V'(t) = \pi 0.6^2 \cdot 0.004 = \pi 0.00144$. Då $h(t) = 1.5$ är höjdens ökningstakt

$$h'(t) = \frac{\pi 0.00144}{\frac{36}{625}\pi 1.5^2} = \frac{0.0001\cdot 12^2\cdot 5^4}{3\cdot 12\cdot(0.1\cdot 3\cdot 5)^2} = \boxed{\frac{1}{90}}$$

meter per timme. $\square$

7. Lös ekvationen $y = x^2y'$ där $y > 0$ med begynnelsevillkoret $y(1) = 1$. (3p)

Lösning Under förutsättningen att $x \neq 0$ har vi att $y - x^2y' = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow\; y' - \frac{1}{x^2}y = 0$ Linjär! $\Rightarrow\; e^{1/x}y' - \frac{1}{x^2}e^{1/x}y = 0 \;\Rightarrow\; e^{1/x}y = C \;\Rightarrow\; y = Ce^{-1/x}$.
Begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ ger att $1 = Ce^{-1/1} = Ce^{-1} \;\Rightarrow\; C = e$ varmed $y(x) = e^{1-1/x}$.
Alternativt kan man tänka att eftersom $y > 0$ och också under förutsättningen att $x \neq 0$ är $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2}$ vilket är en separabel ekvation! Vi har att $\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x^2}\,dx$ varmed $\ln y = -\frac{1}{x} + C$ dvs $y = e^{C-1/x}$ och begynnelsevillkoret ger $C = e$ varmed $y(x) = e^{1-1/x}$ precis som förut. $\square$

8. Lös begynnelsevärdesproblemet
$y'' + 4y' + 13y = 26x - 5, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 5.$ (3p)

Lösning

y_h $\quad r^2 + 4r + 13 = 0 \;\Rightarrow\; r = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm 3i \;\Rightarrow\; y_h = e^{-2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$

y_p $\quad y_p = \frac{26}{13}x + a \;\Rightarrow\; y_p' = 2,\; y_p'' = 0 \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; 13y_p + 4y_p' + y_p'' = 13(2x + a) + 4\cdot 2 = 26x - 5 \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; 13a = -5 - 8 \;\Rightarrow\; a = -1 \;\Rightarrow\; y_p = 2x - 1$

y $\quad y = y_h + y_p = e^{-2x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + 2x - 1 \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; y' = e^{-2x}(-2A\cos 3x - 2B\sin 3x - 3A\sin 3x + 3B\cos 3x) + 2 =$
$= e^{-2x}((-2A + 3B)\cos 3x + (-2B - 3A)\sin 3x) + 2$
Begynnelsevillkoren $y(0) = -1$ och $y'(0) = 5$ ger nu att
$A - 1 = -1$ och $-2A + 3B + 2 = 5$ dvs $A = 0$ och $B = \frac{5-2}{3} = 1$
varmed $\boxed{y(x) = e^{2x}\sin 3x + 2x - 1}$

(Om man istället räknat på högerledet $26x + 5$ hade man fått
$y(x) = e^{-2x}(-\frac{10}{13}\cos 3x + \frac{19}{39}\sin 3x) + 2x - \frac{3}{13}$.)

□

9. Låt $F(x) = \displaystyle\int_e^x \left(\frac{1}{\ln t} + \ln(\ln t)\right) dt$ där $x > e$.

(a) Beräkna $F(e^e)$. (2p)

(b) Visa att F är strängt växande på $[e, \infty)$. (1p)

(c) Visa att $\displaystyle\sum_{k=27}^{\infty} \frac{1}{F(k)^2} \;<\; \frac{28}{27^2}$. (3p)

Lösning

(a) $\int(\frac{1}{\ln t} + \ln(\ln(t))\,dt = \left\{\begin{array}{ll} u = \ln t & t = e^u \\ du = \frac{1}{t}\,dt & dt = e^u du \end{array}\right\} = \int(\frac{1}{u} + \ln u)e^u du =$
$= \int \underbrace{\frac{1}{u}}_{f}\underbrace{e^u}_{g}\,du + \int e^u \ln u\,du = \left\{\begin{array}{ll} g = e^u & f = \frac{1}{u}\,du \\ g' = e^u du\,dt & F = \ln u \end{array}\right\} =$
$= e^u \ln u - \int e^u \ln u\,du + \int e^u \ln u\,du = e^{\ln t}\ln(\ln t) + C = t\ln(lnt) + C$
$F(e^e) = [t\ln(\ln t)]_e^{e^e} = e^e \ln(\ln e^e) - e\ln(\ln e) = e^e\ln(e\cdot 1) - e\ln 1 = \boxed{e^e}$

(b) Visa $F(x)$ strängt växande $\Leftrightarrow$ visa $F'(x) > 0$
$F'(x) = \frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)$. Klart att $\ln x > 0$ då $x > e$ (eftersom $D(\ln x) = \frac{1}{x} > 0, x > e$ och $\ln e = 1 > 0$) varmed även $\frac{1}{\ln x} > 0$ då $x > e$. Eftersom $\ln x$ är strängt växande är även $\ln(\ln x)$ det varmed $\ln(\ln x) > \ln(\ln e) = 0$ då $x > e$. Totalt är därmed $F'(x) = \frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x) > 0$.

(c) Eftersom $\frac{1}{F(x)^2}$ är kont., avtagande och positiv på $[e^e, \infty) \supset [27, \infty)$ så är
$$\sum_{k=27}^{\infty} \frac{1}{F(x)^2} \;\le\; \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{F(27)^2} + \int_{27}^{n} \frac{dx}{F(x)^2}\right) \;=\; \frac{1}{(3^3\ln(\ln 3^3))^2} + \int_{27}^{\infty} \frac{dx}{x^2(\ln(\ln x))^2} \;<$$
$$< \frac{1}{(3^3)^2(\ln(e\ln e))^2} + \int_{27}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \;=\; \frac{1}{27^2} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{27}^{\infty} \;=\; \frac{1}{27^2} + \frac{1}{27} \;=\; \frac{28}{27^2}$$

□