

TENTAMEN I ENVARIABELANALYS, 5P

Distanskurs

11 januari, 2003 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser:** 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel:** Inga.

Kursansvarig: Eric Järpe.

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna skall vara *utförligt* redovisade! Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: <http://www2.hh.se/staff/erja> → TEACHING → Envariabelanalys → övning 030111: lösning

1. Vad är minimum och maximum av funktionen
 $f(x) = 1 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{54}x^3$ på intervallet $[-10, 10]$? (3p)
2. Derivera med avseende på x
 - (a) $(a + x^2)^2$ (1p)
 - (b) $\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ (2p)
3. Härled från definitionen av derivata att $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$. (3p)
(Tips: Utnyttja att $\cos 2\beta - \cos 2\alpha = 2 \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$.)
4. Beräkna $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos 2x \, dx$. (3p)
5. Visa att $\pi \leq \int_0^{\pi} 2^{\sin x} \, dx \leq 2\pi$. (3p)
6. Under ett regnväder samlas vatten upp i en konisk tank med 1.2 m i diameter vid öppningen och höjden 2.5 m. Regnet faller ned med 4 mm/timme, dvs på en vågrät yta skulle vattenhöjden på en timme öka med 4 mm. Med vilken hastighet höjer sig vattennivån i tanken när vattnets höjd i tanken är 1.5 m? (3p)
7. Lös ekvationen $y = x^2 y'$ där $y > 0$ med begynnelsevillkoret $y(1) = 1$. (3p)
8. Lös begynnelsevärdesproblemet
 $y'' + 4y' + 13y = 26x - 5$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 5$. (3p)
9. Låt $F(x) = \int_e^x \left(\frac{1}{\ln t} + \ln(\ln t) \right) dt$ där $x > e$.
 - (a) Beräkna $F(e^e)$. (2p)
 - (b) Visa att F är strängt växande på $[e, \infty)$. (1p)
 - (c) Visa att $\sum_{k=27}^{\infty} \frac{1}{F(k)^2} < \frac{28}{27^2}$. (3p)

LYCKA TILL!