Lösningar till tentamen i Envariabelanalys

Distanskurs
15 mars, 2003 kl. 9.00 – 13.00

1. Beräkna (a) $\int \frac{dx}{2x+1}$ (1p) (b) $\int x \sin x \, dx$ (2p)

Lösning

(a) $\int \frac{dx}{2x+1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Substitution:} \\ u = 2x+1 \\ du = 2\,dx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{u}\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \boxed{\frac{1}{2}\ln|2x+1| + C}$

(b) $\int x \sin x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} \text{P.I.:} & \\ g = x & f = \sin x \\ g' = 1 & F = -\cos x \end{array} \right\} = Fg - \int Fg' =$

$= x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\,dx = \boxed{-x\cos x + \sin x + C}$

□

2. Två positiva reella tal har produkten 8.
Vad är det minsta värdet av summan av dem? (3p)

Lösning

Antag att talen är x och y. Vi vet att $xy = 8$ där $x > 0, y > 0$. Detta innebär att $y = 8/x$. Summan av x och y kan därmed skrivas $x + y = x + 8/x = f(x)$. För att få reda på minimumet av summan $f(x)$ beräknas $f'(x) = 1 - 8/x^2$ och ekvationen $f' = 0$ för att ta reda på extrempunkt ger $1 - 8/x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 8 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{8}$ eftersom $x > 0$. Kontroll av att detta verkligen är ett minimum:

x	1	$\sqrt{8}$	4
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

Därmed är $y = 8/x = 8/\sqrt{8} = \sqrt{8}$ och summan är $x + y = 2\sqrt{8} = \boxed{4\sqrt{2}}$ □

3. Beräkna gränsvärdena

(a) $\lim_{n\to\infty} n(\ln(n+1) - \ln n)$ (2p)

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)^2}{4x^2}$ (2p)

Lösning

(a) <u>Alternativ 1: *standardgränsvärde*</u>

$\lim_{n\to\infty} n(\ln(n+1) - \ln n) = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$

$= \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln e = 1$ (ty $\ln x$ kont. för $x > 0$.)

Alternativ 2: *L'Hospitals regel*

$$\lim_{n\to\infty} n(\ln(n+1)-\ln n) \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\frac{n+1}{n})}{\frac{1}{n}} \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \;=$$

$$= \;\{\text{L'Hospitals regel}\}\; = \;\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n+1}\cdot(-\frac{1}{n^2})}{(-\frac{1}{n^2})} \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} \;=\; 1$$

(b) Alternativ 1: *trigonometriska formler* $\{x^2 \text{ kont.}\} \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos^2 x-\sin^2 x)^2}{4x^2} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos 2x)^2}{4x^2} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{4x^2} \;=$$

$$= \;\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \;=\; \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \;=\; \left(\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\right)^2 \;=\; (1)^2 \;=\; 1$$

Alternativ 2: *Taylorutveckling*

$$\cos x = 1-\tfrac{x^2}{2!}+B(x^4) \;\Rightarrow\; \cos^2 x = (1-\tfrac{x^2}{2}+B(x^4))^2 = 1-x^2+B(x^4)$$

$$\sin x = x-\tfrac{x^3}{3!}+B(x^5) \;\Rightarrow\; \sin^2 x = (x-\tfrac{x^3}{6}+B(x^5))^2 = x^2-\tfrac{x^4}{3}+B(x^6)$$

$$\Rightarrow\; (\cos^2 x-\sin^2 x)^2 = (1-2x^2+B(x^4))^2 = 1-4x^2+B(x^4) \;\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{1-(\cos^2 x-\sin^2 x)^2}{4x^2} \;=\; \lim_{x\to 0}\tfrac{1-(1-4x^2+B(x^4))}{4x^2} \;=\; \lim_{x\to 0}\tfrac{4-B(x^2)}{4} \;=\; 1$$

□

4. Bestäm den primitiva funktion $F(x) = \int \cos^2 x\,dx$ sådan att $F(\pi)=\pi$. (3p)

Lösning

$$F(x) \;=\; \int \cos^2 x\,dx = \left\{\begin{array}{l} \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \quad \text{eftersom} \quad \cos 2x = \\ = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 \end{array}\right\} =$$

$$= \;\tfrac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}(x+\tfrac{1}{2}\sin 2x)+C. \quad \pi \;=\; F(\pi) \;=\; \tfrac{1}{2}(\pi+\tfrac{1}{2}\sin 2\pi)+C =$$

$$= \tfrac{\pi}{2}+C \;\Rightarrow\; C=\tfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; F(x) \;=\; \tfrac{1}{2}(x+\tfrac{1}{2}\sin 2x)+\tfrac{\pi}{2} = \tfrac{1}{2}(\sin x\cos x + x + \pi)$$ □

5. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{4+x^2}$. (3p)

Lösning

$$\int\frac{dx}{4+x^2} = \int\frac{1}{4}\cdot\frac{dx}{1+(2x)^2} = \left\{\begin{array}{l} u=2x \\ du=2,dx \end{array}\right\} = \frac{1}{4}\int\frac{1}{1+u^2}\,(\tfrac{1}{2}\,dx) =$$

$$\frac{1}{8}\arctan u + C = \frac{1}{8}\arctan(2x)+C$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{4+x^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to-\infty}\left[\frac{1}{8}\arctan(2x)\right]_k^n\right) =$$

$$\frac{1}{8}\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to-\infty}(\arctan(2n)-\arctan(2k))\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\lim_{n\to\infty}\left(\arctan(2n)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

□

6. Bosse vill serietillverka bordslampor. För att svarva lampfötter har han en programmerbar svarv där man anger en lampfotsprofil som en funktionskurva. Bosse är speciellt förtjust i profilen $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-3x/2}$ där x är längden av den liggande lampfoten i dm (dvs höjden av den stående). Han vill göra 1000 st 4 dm höga lampfötter och nu ska han beställa virket. Hur stor volym virkesmassa måste Bosse köpa om 25% per lampfot avgår i spill? (3p)

Lösning

Med $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-3x/2}$ är lampfotens volym $V = \int_0^4 \pi\, f(x)^2\, dx$.
Eftersom $\int f(x)^2\, dx = \int x e^{-3x} dx = \left\{ \begin{array}{ll} g = x & f = e^{-3x} \\ g' = dx & F = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{array} \right\} = Fg - \int Fg' =$
$= -\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x} dx = -e^{-3x}(\frac{x}{3} + \frac{1}{9}) + C$
så är $V = \int_0^4 \pi x\, e^{-3x} dx = \pi\Big[- e^{-3x}(\frac{x}{3} + \frac{1}{9})\Big]_0^4 =$
$= -\pi e^{-12}(\frac{4}{3} + \frac{1}{9}) + \pi e^0(\frac{0}{3} + \frac{\pi}{9}) = \frac{\pi}{9}(1 - 13e^{-12})$ dm^3.
Nu avgår $\frac{1}{4}$ i spill så av virkesmassan U blir det $\frac{3}{4}U$ lampfötter. För att detta ska räcka till 1000 lampfötter måste $3U/4 = 1000V$ dvs Bosse måste beställa

$$U = \frac{4}{3} \cdot 1000 \cdot \frac{\pi}{9}(1 - 13e^{-12})\ \text{dm}^3 = \underline{\frac{4\pi}{27}(1 - 13e^{-12})\ \text{m}^3} \quad (\approx 0.4654\ \text{m}^3)$$

□

7. Ange samtliga lösningar till differentialekvationen
$y' \cos^2 x = y \sin 2x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (3p)

Lösning

Alternativ 1: *Separabel ODE*

$y'\frac{1}{y} = \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}$
$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x}\, dx$
$VL = \int \frac{1}{y}\, dy = \ln|y|$
$HL = 2\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x\, dx \end{array} \right\} = 2\int \frac{1}{u}\,(-du) =$
$= -2\ln|u| + C = -2\ln|\cos x| + C = \ln\frac{1}{\cos^2 x} + C \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; y = \frac{C}{\cos^2 x}$ där $C > 0$.

Alternativ 2: *Linjär ODE*

$y' \cos^2 x - y \sin 2x = 0$
$y' - \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} y = 0$ (ok, ty $\cos x \neq 0$ för $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$)
$G(x) = \int g(x) = -\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}\, dx = -2\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \{\text{se ovan}\} = \ln\frac{1}{\cos^2 x}$
$e^{G(x)}y' + g(x)e^{G(x)}y = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot y' - \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot y = 0$
$y\frac{1}{\cos^2 x} = C$
$y(x) = Ce^{\ln\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{C}{\cos^2 x},\ C > 0$ □

8. En ny flygplats med en start- och landningsbana ska byggas och man vill veta hur lång banan måste vara. Sträckan, D_1, ett flygplan ska färdas på startbanan då det ska lyfta är $D_1(t) = t^2$ meter där t är tiden i sekunder från att man släpper bromsen och flygplanet lyfter då markhastigheten är 180 km/tim. Sträckan, D_2, en plan färdas på banan då det landar är $D_2(t) = t(D_2'(t) + t)$ meter där t är tiden i sekunder från markkontakt och hastigheten då planet tar mark är 216 km/tim. Hur lång måste start- och landningsbanan byggas? (4p)

Lösning

$D_1(t) = t^2$. Planen lyfter då $D_1'(t) = 180 \cdot \frac{1000}{3600} = 50$ m/sek. $D_1'(t) = 2t = 50 \Rightarrow$
$\Rightarrow t = 25$ sek. varmed startsträckan är $D_1(25) = 625$ meter.

Planen flyger in med $D_2'(t) = 216 \cdot \frac{1000}{3600} = 60$ m/sek.
och $D_2(t) = t(D_2'(t) + t) \Rightarrow D_2(t) - tD_2'(t) = t^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -\frac{1}{t}D_2 + D_2' = -t$ (linjär!) $\Rightarrow -\frac{1}{t}e^{-\ln t}D_2 + e^{-\ln t}D_2' = -te^{-\ln t} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{t}D_2 = -\int te^{-\ln t}dt = -\int t \cdot \frac{1}{t}\,dt = -t + C \Rightarrow D_2 = -t^2 + Ct \Rightarrow$
$\Rightarrow D_2' = -2t + C$. $D_2'(0) = 60 = C \Rightarrow t = 30$ då $D_2'(t) = 0$ varmed landningssträckan är $D_2(30) = -30^2 + 60 \cdot 30 = 900$ meter. Därmed måste start- och landningsbanan byggas <u>900 meter lång.</u> $\square$

9. Lös begynnelsevärdesproblemet
$2\ln(y'e^y) + \ln(x+1) = 2\sqrt{x+1}$ där $y(3) = 2 + \ln 2$ och $x > -1$. (4p)

Lösning

$\ln(y'e^y) = \sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\ln(x+1)$
$y'e^y = e^{\sqrt{x+1} - \ln\sqrt{x+1}} = e^{\sqrt{x+1}}/\sqrt{x+1}$ (Separabel!)
$\int e^y dy = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}e^{\sqrt{x+1}}dx\ e^y = \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{x+1} \\ du = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx \end{array} \right\} =$
$= \int e^u 2\,du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x+1}} + C$
$\Rightarrow y = \ln(2e^{\sqrt{x+1}} + C)$
$2 + \ln 2 = y(3) = \ln(2e^2 + C) \Rightarrow C = 0$
dvs $y(x) = \ln(2e^{\sqrt{x+1}}) = \sqrt{x+1} + \ln 2$. $\square$