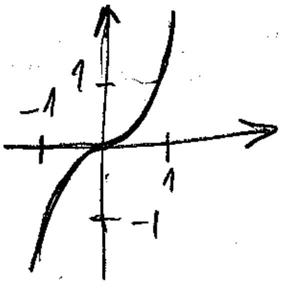
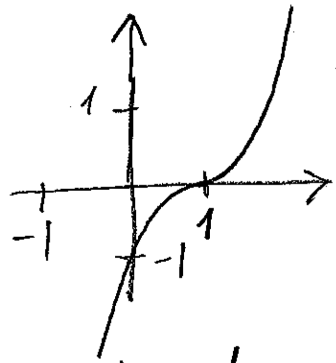
P&B Kap. 1

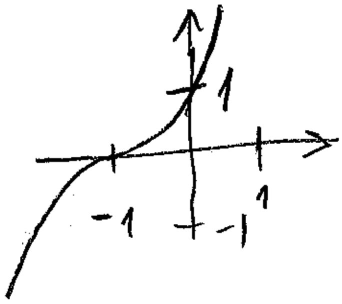
1 a)



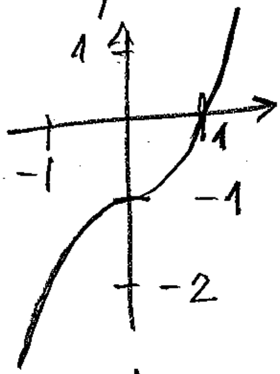
b)



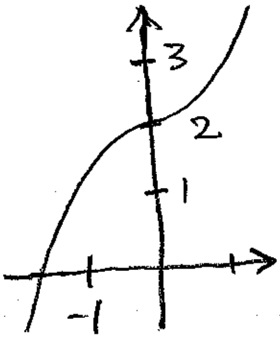
c)



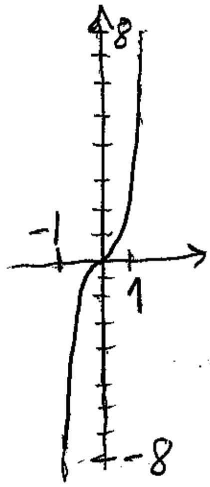
d)



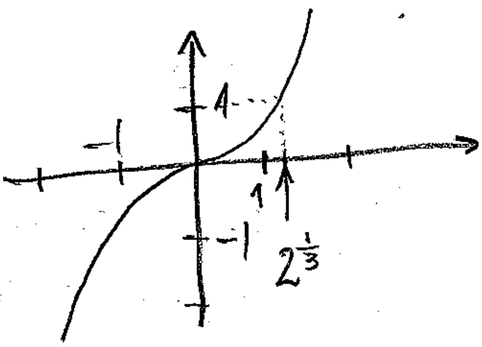
e)



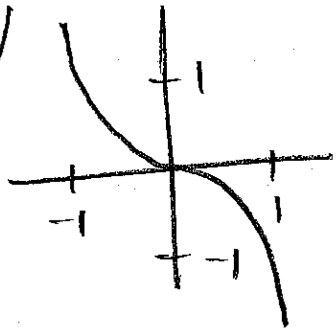
f)



g)

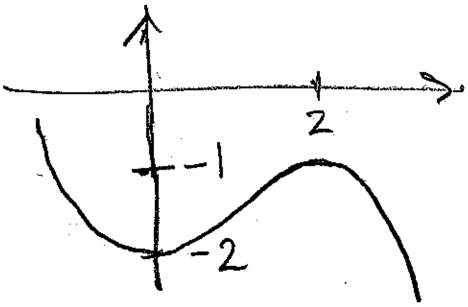


h)

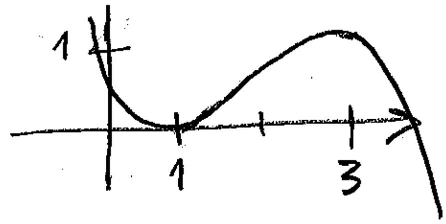


i) Samma som

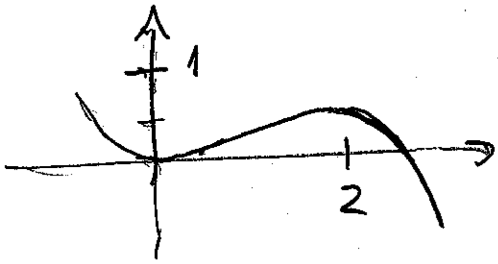
1.2 a)



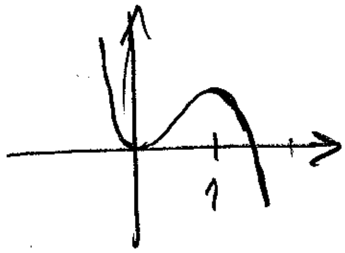
b)



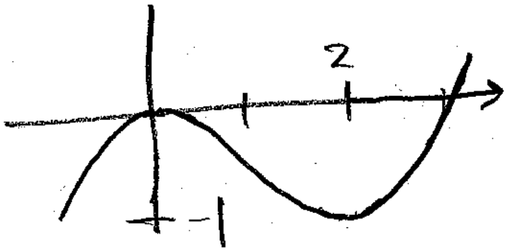
c)



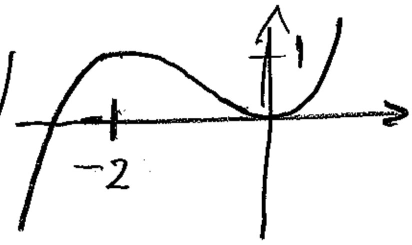
d)



e)



f)



1.3 a) $x^2-3x+2 = x^2 - 2\cdot\frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2$

$= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2$

$= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

... (lösningar finns)

1.4 a) Kvadratkompl. $x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1$

$= (x+1)^2+1$

Ekv. $x^2+2x+2=0$ $\quad x=-1\pm\sqrt{1-2}$ saknar reell lösn.

Minsta värdet på $(x+1)^2+1$ är då $x=-1$: $(-1+1)^2+1=1$

Olikheten $x^2+2x+2\geq 0$ $\quad (x+1)^2+1\geq 0$ för alla x

1.4 b) Kvadratkompl. $x^2 - x = x^2 - 2\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

Ekv. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

Minsta värdet då $x = \frac{1}{2}$: $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

Olikheten $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq 0$ då $\underline{x \geq 1 \text{ eller } x \leq 0}$

c) kvadratkompl. $1 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 1)$
$= -(x^2 + 2x + 1 - 2)$
$= -((x+1)^2 - 2)$
$= -(x+1)^2 + 2$

Ekv. $2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1 \vee x = -\sqrt{2} - 1$

Minstavärdet: finns inget eftersom $-(x+1)^2 + 2$ blir mindre ju större positivt eller större negativt x är.

Olikheten $-(x+1)^2 + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -(x+1)^2 \geq -2$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 2$ (OBS! Olikheten vänds!) $\Leftrightarrow x \leq \sqrt{2} - 1$
$\wedge\ x \geq -\sqrt{2} - 1$

d) Kvadratkompl. $2x^2 + x + 1 = 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) =$
$= 2\left(x^2 + 2\frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)$
$= 2\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right)$
$= 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$
$= \left(\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \frac{7}{8}$
$= \left(\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{7}{8}$

Ehv. $\left(\sqrt{2}\,x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{7}{8}$ saknar reell lösn.

Minsta värdet då $x=-\frac{1}{4}$: $\left(\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\frac{7}{8}=\frac{7}{8}$

Olikheten $\left(\sqrt{2}\,x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\frac{7}{8}\geq 0$ för alla x.

1.5 $f = x^2 - x \quad g = 1-3x$

skär där $f=g$ dvs där

$x^2 - x = 1-3x$

$x^2+2x-1=0$

$(x+1)^2-2=0$

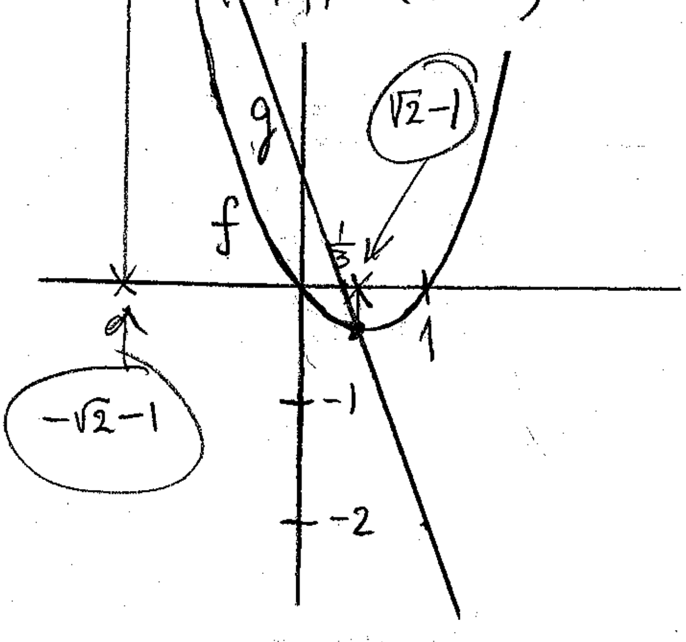
$x=\sqrt{2}-1$ eller $x=-\sqrt{2}-1$

$f(\sqrt{2}-1) = 2-2\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1 = 4-3\sqrt{2} = g(\sqrt{2}-1)$ ok

$f(-\sqrt{2}-1) = 2+2\sqrt{2}+1-(-\sqrt{2}-1) = 4+3\sqrt{2} = g(-\sqrt{2}-1)$ ok

skärningspunkterne är

$(x,y) = (\sqrt{2}-1,\ 4-3\sqrt{2})$ och $(-\sqrt{2}-1,\ 4+3\sqrt{2})$



$f>g$ för

$x<-\sqrt{2}-1$ och

för $x>\sqrt{2}-1$

1.9 a) $f(2x) = (2x)^2 = 4x^2 = 3(-x) = -3x = g(-x)$

$$\Leftrightarrow \quad 4x^2 + 3x = 0$$

$$x(4x+3) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -\frac{3}{4}$$

b) $3x > x^2$

$$x^2 - 3x < 0$$

$$x^2 - 2\tfrac{3}{2}x + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 < 0$$

$$\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{3}{4} < x < 0 \quad \left(\begin{matrix}\text{m.h.a}\\ \text{a-uppg.}\end{matrix}\right)$$

c) $h(x) = (x-1)^2 + 3(x-1)$

$$= x^2 - 2x + 1 + 3x - 3$$

$$= x^2 + x - 2$$

$$= x^2 + 2\cdot\tfrac{1}{2}x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 2$$

$$= \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2$$

$= 0$ då $x = 1$ eller $x = -2$

11 b) 3 c) 3 f) $|x|$ (OBS! Inte bara x.)

12 b) $x = 0$ c) Saknar lösn. eftersom $|x| \geq 0$

f) $|1 - x| = 1$

Om $1 - x > 0$: $1 - x = 1$

$x = 0$

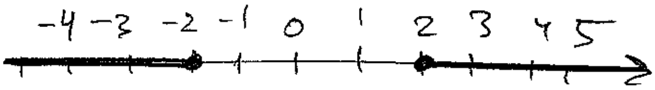
Om $1 - x < 0$: $-(1 - x) = 1$

$x - 1 = 1$

$x = 2$

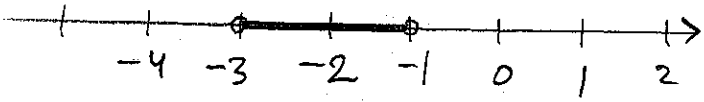
Svar: $x_1 = 0$ och $x_2 = 2$

13 b) $|x - 0| \geq 2$



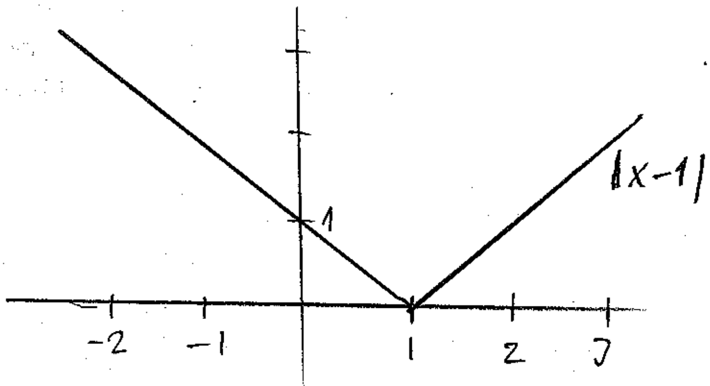
["Avståndet till 0 är större än eller lika med 2"]

d) $|x - (-2)| < 1$



["Avståndet till -2 är mindre än 1"]

14 b)



1.16 a) $x^5+3x^4-2x^3+2x-1 =$

$= (x^3+x+1)(x^2+3x-3)-4x^2+2x+2$

Kvot: x^2+3x-3 Rest: $-4x^2+2x+2$

vilket även kunnat deduceras med division

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+3x-3 \\
\hline
x^3+x+1 & x^5+3x^4-2x^3+0\cdot x^2+2x-1 \\
 & -(x^5+0+x^3+x^2) \\
\hline
 & 3x^4-3x^3-x^2+2x \\
 & -(3x^4+0+3x^2+3x) \\
\hline
 & -3x^3-4x^2-x-1 \\
 & -(-3x^3+0-3x-3) \\
\hline
 & -4x^2+2x+2
\end{array}
$$

kvot

rest

b) $x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)+0$

dvs kvot: $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ rest: 0

17 a) $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ (konjugatregeln)

b) $x^2+2x+1 = (x+1)^2$ (första kvadreringsregeln)

c) $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$

d) $x^2 - 3x + 2$ {ser 1 är ett nollställe} $=$

$= (x-1)(x-2)$ (ok!)

f) $x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2-2x+1) = x^2(x-1)^2$

---

18 b) x^2+1 kan ej ytterligare faktoriseras

c) x^3-1 {ser 1 är ett nollställe}

$= (x-1)(x^2+x+1)$

f) $x^4+27x = x(x^3+27)$ {ser -3 ett nollställe}

$= x(x+3)(x^2-3x+9)$

(kan ej ytterligare faktoriseras i $\mathbb{R}$:

$x^2-3x+9 = 0 \iff x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{9}{4}-9}_{<0}} \notin \mathbb{R}$)

Uppgifter, kap.1

(Hänv. inom parenteser gäller äldre upplagor.)

1.19 (~~1.22~~) Att $x = 1$ är nollställe till $p(x)$ betyder att vi kan faktorisera

$$p(x) = (x-1)\,(\text{något polynom } q(x))$$

Att $x = 1$ är nollställe med multiplicitet m betyder att vi kan bryta ut $(x-1)^m$, men inte någon högre potens av $(x-1)$:

$$p(x) = (x-1)^m \begin{pmatrix} \text{polynom som} \\ \text{inte har } x = 1 \text{ som nollställe} \end{pmatrix}$$

Det gäller alltså att se hur många gånger vi kan bryta ut $(x-1)$, eller med andra ord: hur många gånger division med $x-1$ går jämnt ut. Någon särskild uppställning behövs egentligen inte när nämnaren är ett förstagradspolynom: Ansätt

$$\begin{aligned} & x^5 - 10x^2 + 15x - 6 \\ = \; & (x-1)\left(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e\right) \end{aligned}$$

Jämför båda ledens

$$\begin{aligned} x^5\text{-termer} &: \; 1 = a \\ x^4\text{-termer} &: \; 0 = -a + b \Longrightarrow b = 1 \\ x^3\text{-termer} &: \; 0 = -b + c \Longrightarrow c = 1 \\ x^2\text{-termer} &: \; -10 = -c + d \Longrightarrow d = -9 \\ x^1\text{-termer} &: \; 15 = -d + e \Longrightarrow e = 6 \\ x^0\text{-termer} &: \; -6 = -e \Longrightarrow e = 6, \text{ Stämmer!} \end{aligned}$$

Denna räkning kan göras i huvudet. (När jag på detta sätt uppmanar dig att ta en annan väg än "standardmetoden", så är det för att påminna dig om att metoder och speciellt uppställningar är endast ett medel och inte mål i sig. Sätt inte likhetstecken mellan *polynomdivision* och en viss *uppställning för polynomdivision*! (Se till att inte glömma betydelsen av de tal du räknar fram med en viss uppställning!)

Nu ser vi att $x = 1$ är nollställe till $x^4 + x^3 + x^2 - 9x + 6$, så vi upprepar:

$$x^4 + x^3 + x^2 - 9x + 6 = (x-1)\left(x^3 + 2x^2 + 3x - 6\right)$$

Och en gång till:

$$x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = (x-1)\left(x^2 + 3x + 6\right)$$

Däremot är $x = 1$ inte nollställe till $x^2 + 3x + 6$, så det är ingen idé att försöka dividera en gång till. Polynomet $x^2 + 3x + 6$ har inga reella nollställen, så vi är färdiga:

$$p(x) = (x-1)^3\left(x^2 + 3x + 6\right)$$

Alternativ: Att $p(x)$ har nollstället $x = a$ med multiplicitet n är detsamma som att

$$p(a) = p'(a) = \ldots = p^{(n-1)}(a) = 0, \\ \text{men } p^{(n)}(a) \neq 0$$

Kontrollera derivatorna

$$\begin{aligned} p'(x) &= 5x^4 - 20x + 15 \text{ har nollstället } x = 1 \\ p''(x) &= 20x - 20 \text{ också} \\ p^{(3)}(x) &= 20 \text{ däremot inte} \end{aligned}$$

Alltså är multipliciteten 3. För att faktorisera måste vi emellertid utföra polynomdivision. Det räcker med *en* sådan

$$\frac{p(x)}{(x-1)^3} = \frac{p(x)}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$$

och då lämpligen med uppställning!

1.20 (~~1.23~~) Utnyttja resonemangen från övn. 1.1.& 1.2! Kurvorna $y = 1/x$ och $y = 1/x^2$, skall man kunna se i tanken lika lätt som sin moders ansikte! Utnyttja dessa till att göra dig en bild av de andra:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x-4} \text{ är} \\ y &= \frac{1}{x} \text{ translaterad 4 steg åt höger} \end{aligned}$$

eftersom

$$\begin{aligned} x &= a + 4 \text{ insatt i } \frac{1}{x-4} \text{ ger samma resultat som} \\ x &= a \text{ insatt i } \frac{1}{x} \end{aligned}$$

På samma sätt

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{(x+1)^2} \text{ är} \\ y &= \frac{1}{x^2} \text{ translaterad 1 steg åt vänster} \end{aligned}$$

Omskrivningen

$$\frac{x-1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

visar att kurvan i e) fås ur $y = \frac{1}{x}$ genom att först spegla i x-axeln och sedan translatera 1 steg uppåt. Omskrivningen

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x-4} &= \frac{x-4+1}{x-4} = \\ &= \frac{x-4}{x-4} + \frac{1}{x-4} = 1 + \frac{1}{x-4} \end{aligned}$$

att kurvan i f) fås ur kurvan i c) genom att translatera 1 steg uppåt.

23 a) $\dfrac{a^{3.3}a^{-2.1}}{a^{0.8}} = a^{3.3-2.1-0.8} = a^{0.4}$

b) $\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \dfrac{a\,a^{1/2}}{(a^2)^{1/3}} = a^{3/2-2/3} = a^{5/6}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{x}}\,\sqrt[6]{x^{-1}}\,(x^2)^{2/3} = (x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}\,(x^{-1})^{\frac{1}{6}}\,(x^2)^{\frac{2}{3}} =$

$= x^{\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{4}{3}} = x^{4/3}$

d) $\left(ab\sqrt[4]{\dfrac{a^3}{\sqrt{b\sqrt{b}}}}\right)^2 = a^2b^2\left(\dfrac{a^3}{(b\,b^{1/2})^{1/2}}\right)^{1/2} =$

$= a^2b^2a^{3/2}((b\,b^{1/2})^{1/2})^{-1}$ (FEL i facit?)

$= a^{2+\frac{3}{2}}\,b^{2+(1+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\cdot(-1)} = a^{\frac{7}{2}}\,b^{\frac{5}{4}}$

---

24 a) $3^x+3^{x+1} = 3^x+3^x3 = 3^x(1+3) = 3^x\cdot 4$

b) $e^x+e^{x+1} = e^x(1+e)$

c) $(e^x+e^{-x})^2 - e^{2x} - e^{-2x} = e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x} - e^{2x} - e^{-2x}$

$= 2$

d) $\dfrac{1}{e^x} + \dfrac{1}{e^{x+1}} = e^{-x} + e^{-x-1} = e^{-x}(1+e^{-1})$

26 a) $\ln\frac{1}{x^2} + \ln x^3 = \ln\left(\frac{1}{x^2}\cdot x^3\right) = \ln x$

b) $\ln e^{2x} = 2x \ln e = 2x$

c) $e^{\ln t} = t$

d) $\ln e^x + \ln e^{-x} = x\ln e + (-x)\ln e = x - x = 0$

---

27 $\ln(a+b) - \ln a - \ln b \overset{a>0,\, b>0}{=}$

$= \ln(a+b) + \ln a^{-1} + \ln b^{-1} = \ln\left((a+b)\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\right) =$

$= \ln\left(\frac{a}{ab} + \frac{b}{ab}\right) = \ln\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$

Ja, om $a>0$ och $b>0$

T.ex. är $\ln\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ definierat om $a=2$ och $b=-3$ men det är inte $\ln b$.

1.31 b) $\ln(3^x + 3^{x+1}) = 1$

$\ln(3^x(1+3)) = 1$

$\ln 3^x + \ln 4 = 1$

$x\ln 3 = 1 - \ln 4$

$x = \frac{1-\ln 4}{\ln 3}$

1.31a ~~(1.34a)~~ Obs. att när man skriver något i stil med

$$\ln a + \ln b = \ln ab \text{ för alla } a \text{ och } b$$

så är det underförstått att man menar "**för alla** a **och** b**, för vilka båda leden är definierade**". Här är vänsterledet definierat då och endast då $a > 0$ och $b > 0$, medan högerledet är definierat även när a och b båda är negativa – då blir ju $ab > 0$.

Vår ekvations vänsterled

$$\ln x + \ln (x - 2)$$

är definierat endast för $x > 2$, så glöm övriga x !
För $x > 2$ är

$$\ln x + \ln (x - 2) = \ln (x (x - 2))$$

så vi löser

$$\begin{aligned} \ln (x (x - 2)) &= 2 \\ x (x - 2) &= e^2 \\ x^2 - 2x - e^2 &= 0 \\ x &= 1 \pm \sqrt{1 + e^2} \end{aligned}$$

Av dessa två rötter är endast

$$1 + \sqrt{1 + e^2} > 2$$

1.32 ~~(1.35)~~

T = halveringstid $\Longleftrightarrow$
ämnets massa vid tiden $t + T$ =
hälften av ämnets massa vid tiden t $\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} m (0) e^{-\lambda(t+T)} &= \frac{1}{2} m (0) e^{-\lambda t} \Longleftrightarrow \\ e^{-\lambda T} &= \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \\ \frac{1}{e^{\lambda T}} &= \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \\ e^{\lambda T} &= 2 \\ \lambda T &= \ln 2 \end{aligned}$$

37 a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-10x+1}{2x^3+4x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3\left(\frac{1}{x}-\frac{10}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{10}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}} = \dfrac{0+0+0}{2+0+0} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-10x+1}{3x^2+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x^2+1)^3}{(x^3+2)^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^6+4x^3+4} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^6}}{1+\frac{4}{x^3}+\frac{4}{x^6}} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-10x+1}{2x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} =$

$= \dfrac{1+0+0}{0+0} = \infty$

1.40 b) Tips: Då $x>0$ är

$\ln 5x^2 = \ln 5 + 2\ln x$

$\ln 6x^3 = \ln 6 + 3\ln x$

44. a) $f(x) = 3x + 4 \quad x \in \mathbb{R}$

$f(x) - 4 = 3x$

$x = \frac{1}{3}(f(x) - 4)$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(y-4)$

b) $f(x) = |x|$ är ej injektiv eftersom $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Därmed har f ingen invers.

c) $f(x) = \frac{1}{x+2} \quad x > -2$

$(x+2) f(x) = 1$

$x + 2 = \frac{1}{f(x)}$

$x = \frac{1}{f(x)} - 2$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{y} - 2$

där $x > -2 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x+2} > 0$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x+2} = f(x) = y$ dvs $y > 0$.

d) $x^2 + 4x + 5 = x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2 + 5 =$

$= (x+2)^2 + 1 = f(x)$ ej injektiv, t.ex. $f(-3) = 2 = f(-1)$. Därmed är f ej inverterbar.

44e) $x^2+4x+5 \quad x \geq -2$ ok, inverterbar!

$$f(x) = x^2+4x+5$$

$$= (x+2)^2+1$$ [Antar sitt minsta värde i $x=-2$ så $x \geq -2 \Rightarrow f(x) \geq 1$]

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = f(x)-1$$

$$\Leftrightarrow x+2 = \sqrt{f(x)-1}$$ [ok ty $x \geq -2 \Rightarrow f(x) \geq 1$]

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{f(x)-1} - 2$$

Svar: $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1} - 2$

f) $f(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}} \quad x > 0$

$\{x > 0 \Rightarrow f(x) > 1\}$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{x} = f(x)^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{f(x)^2-1}$$ [ok ty $x>0 \Rightarrow f(x)>1 \Rightarrow f(x)^2-1>0$]

Svar: $f^{-1}(y) = \frac{1}{y^2-1}$

45 Antag att $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$.

Dess invers blir då

$$f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a} = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$$

För att $f^{-1}(x) = f(x)$ måste

alltså $a = \frac{1}{a}$ och $b = -\frac{b}{a}$

$$\Rightarrow a_1 = 1, a_2 = -1 \Rightarrow b_1 = 0, b_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Detta innebär att ett polynom som är sin egen invers är

$f(x) = x$

Ett annat är

$f(x) = -x + b$ där $b \in \mathbb{R}$.

(Hur det blir med högre ordningens polynom är en annan historia men det var ju inte heller frågan!)

$\square$

46 b) $f \circ g = f(g(x)) = 2g(x)+1 = 2x^2+1$, $x \in \mathbb{R}$

c) $g \circ f = g(f(x)) = (f(x))^2 = (2x+1)^2 = 4x^2+4x+1$
$x \in \mathbb{R}$

---

49 a) jämn ty $(-x)^2 = x^2$ för alla $x \in \mathbb{R}$

b) udda ty $(-x)^3 = -x^3$ för alla $x \in \mathbb{R}$

c) varken jämn eller udda.

d) $\underbrace{x}_{\text{udda}}\underbrace{(e^x+e^{-x})}$

jämn ty $e^x + e^{-x} = e^{-x} + e^{-(-x)} = e^{-x} + e^x$

och udda · jämn är <u>udda</u> (precis som med vanliga tal).

e) Varken udda eller jämn ($x \ln x$ är ju inte ens definierad för $x \leq 0$.)

---

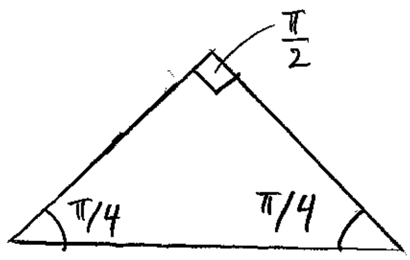
50 Enl. sinussatsen (Sats 12, s. 108 i P&B)

b) $\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$
$\Rightarrow x = a\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = a\tan\alpha$

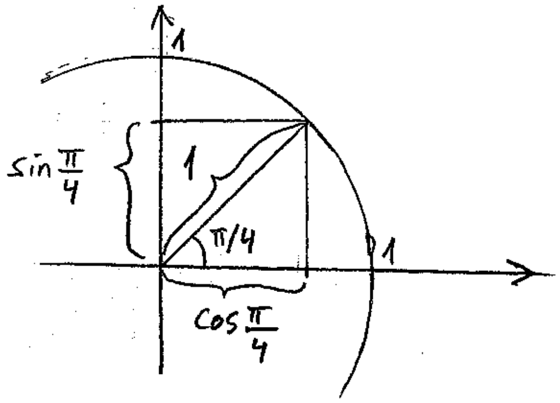
c) $\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$
$\Rightarrow x = a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a}{\tan\alpha}$

f) $\frac{x}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{\sin\alpha}$
dvs $x = \frac{a}{\sin\alpha}$

5| a)



(se även s. 98)



För att hypotenusan ska vara 1 måste enl. Pythagoras sats

$\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1$ (trig. ettan)

I detta fall delar vinkeln $\frac{\pi}{4}$ den räta $\frac{\pi}{2}$ mitt itu varmed $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = a$

dvs $a^2 + a^2 = 2a^2 = 1 \Rightarrow |a| = \frac{1}{2}$.

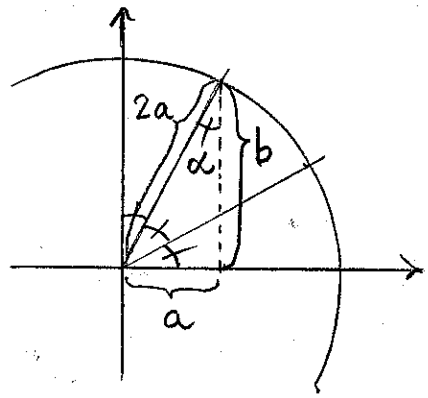
I detta fall när cos och sin är positiva är

a) $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $\tan\frac{\pi}{4} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$

51 b) (för bild, se s. 98)



Vinkeln α är $\frac{1}{3}$ av den räta vinkeln $\frac{\pi}{2}$, dvs $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

$$\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{a} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2a} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Enl. Pythagoras sats ska

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2 = 1^2 \Rightarrow b = (\pm)\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

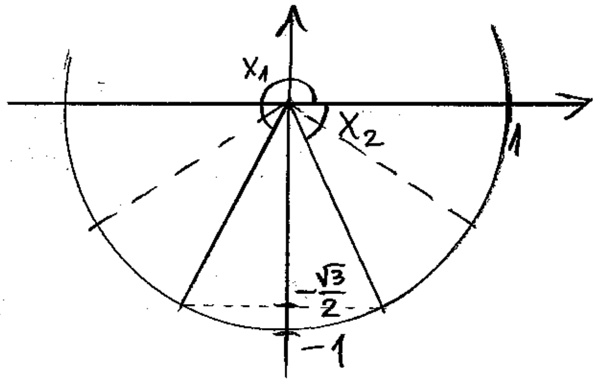
Därmed är $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

och $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

varmed $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

och $\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$.

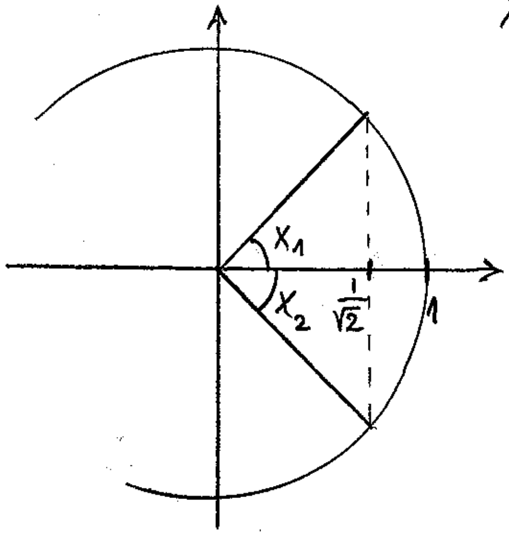
53 b)



$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{6} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ -2\frac{\pi}{6} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x \in \left\{ \pi\left(\tfrac{5}{6} + 2n\right), \pi\left(-\tfrac{1}{3} + 2n\right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

c)

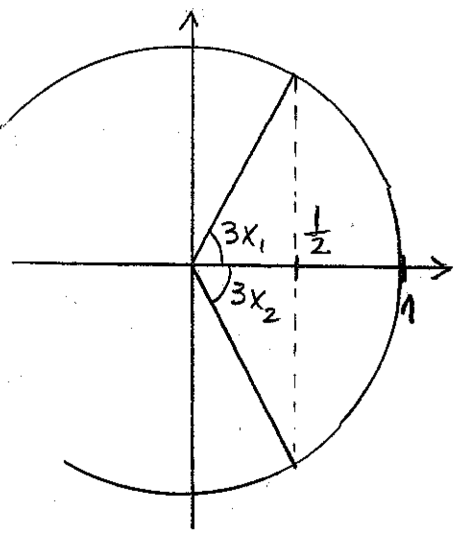


$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x \in \left\{ \pi\left(\pm\tfrac{1}{4} + 2n\right), n \in \mathbb{Z} \right\}$$

f)



$$\cos 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

55 a)

$$\cos x = \cos 3x$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin x \cos x \sin x$$

$$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x)$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Därmed är ekvationen

$$0 = \cos 3x - \cos x$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x - \cos x$$

$$= 4\cos^3 x - 4\cos x$$

dvs $0 = \cos x(\cos^2 x - 1)$

$$= \cos x(\cos x - 1)(\cos x + 1)$$

som har lösningarna $\cos x = -1, 0, 1$

dvs $x = \frac{\pi}{2} n$ där $n \in \mathbb{Z}$

1.48 a) $a < b$

$\Downarrow$ då f och g är växande

$f(a) \leq f(b)$

$g(a) \leq g(b)$

$\Downarrow$

$f(a) + g(a) \leq f(b) + g(b)$

1.61 a/b) Utnyttja $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

och $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

1.61 c) Utnyttja hjälpvinkelomskrivningen i övn. 1.58

1.61 d/f) Kan återföras till andragradsekvationer i $\cos x$ resp. $\sin x$ m.h.a.

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

1.66

1.66 T.ex utnyttja att

$$1-\sin\theta = 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$1+\sin\theta = 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

1.67 Man inser att $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ och $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ där $t = \tan\frac{x}{2}$ genom att:

$$\sin x = \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} =$$

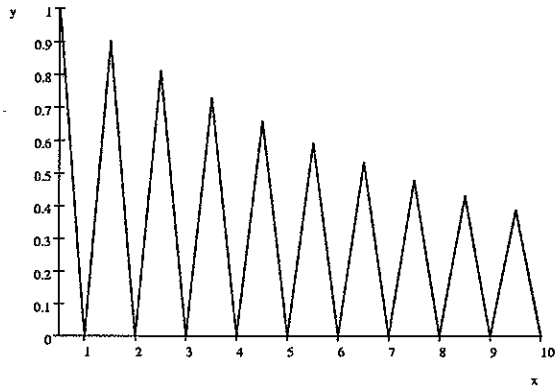
$$= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\left(2\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)}{\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)} =$$

$$= \frac{2\tan\frac{x}{2}\cdot 1}{\tan^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

På liknande sätt är $\cos x = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) =$

$$= \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

1.91 Rita figur innan du börjar tricksa med formler!



Obs. att med "förlorar 1/10 av sin rörelseenergi" menas "förlorar 1/10 av den rörelseenergi den har *då*", så

$$\text{en topps höjd } = 0.9 \cdot (\textit{föregående} \text{ topps höjd})$$

Maximihöjderna avtar alltså som

$$1, 0.9, 0.9^2, 0.9^3, 0.9^4, \ldots$$

Maximihöjden före första studsen är $1 = 0.9^0$, före den andra – 0.9, före den tredje – 0.9^2, etc., så före den tionde studsen är den 0.9^9. Totala sträckan är alltså

$$\begin{aligned}
& 1 + 2\left(0.9 + 0.9^2 + 0.9^3 + \ldots + 0.9^9\right) \\
= & \left[\begin{array}{l}\text{Lägg till och dra ifrån 1,} \\ \text{så att man får en geom. summa} \\ \text{som börjar på 1.}\end{array}\right] = \\
= & \; 2\left(1 + 0.9 + 0.9^2 + 0.9^3 + \ldots + 0.9^9\right) - 1 = \\
= & \; [\text{geom. summa med kvot } 0.9] = \\
= & \; 2\frac{1 - 0.9^{10}}{1 - 0.9} - 1 = 20\left(1 - 0.9^{10}\right) - 1 = \\
= & \; 19 - 20 \cdot 0.9^{10}
\end{aligned}$$

vilket naturligtvis är lika med häftets svar

$$\begin{aligned}
1 + 18\left(1 - 0.9^9\right)) &= 19 - 18 \cdot 0.9^{10} = \\
&= 19 - 20 \cdot 0.9 \cdot 0.9^9
\end{aligned}$$

1.102 Sätt in $a = 1$, $b = -1$ i binomialsatsen

$$\begin{aligned}
& (a+b)^n \\
= & \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots
\end{aligned}$$

1.108 I deluppgift a) byter jag ut 4 mot 2, så jag får plats att skriva summorna explicit (utan summatecken). Vänsterleden är

geom.summor med kvot $1 + x$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2}(1+x)^2 &= 1 + (1+x) + (1+x)^2 = \\
&= \frac{(1+x)^3 - 1}{(1+x) - 1} \\
\sum_{k=0}^{n-1}(1+x)^k &= \frac{(1+x)^n - 1}{(1+x) - 1}
\end{aligned}$$

Binomialsatsen ger

$$\begin{aligned}
(1+x)^3 &= \binom{3}{0}1 + \binom{3}{1}x + \binom{3}{2}x^2 + \binom{3}{3}x^3 = \\
&= \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}x^k \\
(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k
\end{aligned}$$

När vi subtraherar 1 från dessa, försvinner den första summatermen – den med $k = 0$.

$$\begin{aligned}
(1+x)^3 - 1 &= \binom{3}{1}x + \binom{3}{2}x^2 + x^3 \\
&= \sum_{k=1}^{3}\binom{3}{k}x^k \\
(1+x)^n - 1 &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k
\end{aligned}$$

Sedan dividerar vi med nämnaren $(1+x) - 1 = x$, vilket är likvärdigt med att alla termer i summan divideras med x :

$$\begin{aligned}
\frac{(1+x)^3 - 1}{x} &= \frac{\binom{3}{1}x}{x} + \frac{\binom{3}{2}x^2}{x} + \frac{\binom{3}{3}x^3}{x} = \\
&= \binom{3}{1} + \binom{3}{2}x + \binom{3}{3}x^2 = \\
&= \sum_{k=1}^{3}\binom{3}{k}x^{k-1} \\
\frac{(1+x)^n - 1}{x} &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1}
\end{aligned}$$

A.17

$$z + \frac{1}{z} = z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} =$$

$$= a+bi + \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{(a+bi)(a^2+b^2)+a-bi}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left(a^3+ab^2+a^2bi+b^3i+a-bi\right)$$

$z+\frac{1}{z}$ reellt då $\operatorname{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)=0$

$$\operatorname{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left(a^3+ab^2+a^2bi+b^3i+a-bi\right)\right)$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left(a^2b+b^3-b\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-1 = 0 \quad \{\text{el. } b=0\}$$

$$\Leftrightarrow |z| = 1$$

Alltså på cirkelranden $|z|=1$ eller i på den vertikala linjen $\operatorname{Im} z = 0$, dvs för

$$z \in \{z : |z|=1 \vee \operatorname{Im} z = 0\}$$