På begäran:

$$a_n = 3a_{n-1} + n^2 + 3^n \qquad a_0 = 7$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + Ba_n = (n+2)^2 + 3^{n+2} \qquad a_0 = 7$$

där $B = 0$

<u>Hom.ekv.</u> $a_{n+2} - 3a_{n+1} = 0$

kar.ekv. $\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases} \Rightarrow$

<u>Part.lösn.</u> $a_{pl,n} = pn^2 + qn + r \qquad a_{hn} = A\,3^n$

$$a_{n+2} = p(n+2)^2 + q(n+2) + r$$
$$= pn^2 + 4pn + 4p + qn + 2q + r$$
$$= pn^2 + (4p+q)n + (4p+2q+r)$$

$$a_{n+1} = p(n+1)^2 + q(n+1) + r$$
$$= pn^2 + 2pn + p + qn + q + r$$
$$= pn^2 + (2p+q)n + (p+q+r)$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = (1-3)pn^2 + ((4p+q) - 3(2p+q))n$$
$$+ ((4p+2q+r) - 3(p+q+r))$$
$$= (n+2)^2$$

$$-2pn^2 + (-2p-2q)n + (p-q-2r) = n^2 + 4n + 4$$

$$\Rightarrow -2p = 1 \Rightarrow p = -\frac{1}{2}, \quad -2p - 2q = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = -2 - p = -\frac{3}{2}, \quad p - q - 2r = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = -\frac{1}{2}(4 - p + q) = -\frac{1}{2}\left(4 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = \frac{-3}{2}$$

Alltså är $a_{p1,n} = -\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$

Vidare ansätter vi $a_{p2,n} = z_n 3^n$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = z_{n+2}3^{n+2} - 3z_{n+1}3^{n+1} = 3^{n+2}$$

$$z_{n+2} - z_{n+1} = 1$$

så $z_n = n$ ok $\Rightarrow a_{p2,n} = n3^n$

[Om det hade varit $a_{n+2} - 3a_{n+1} = 4^{n+2}$
istället hade vi ansatt $a_n = z_n 4^n \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{n+2} - 3a_{n+1} = z_{n+2}4^{n+2} - 3z_{n+1}4^{n+1} = 4^{n+2}$
$\Rightarrow 4z_{n+2} - 3z_{n+1} = 4 \Rightarrow z_n = 4$ ok
$\Rightarrow a_{p2,n} = 4 \cdot 4^n = 4^{n+1}$]

Allm. lösn. $a_n = a_{hn} + a_{p1,n} + a_{p2,n} =$

$$= A3^n + \left(-\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - \frac{3}{2}\right) + n3^n$$

Fullst. lösn. $7 = a_0 = A - \frac{3}{2} \Rightarrow A = \frac{17}{2}$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(17 \cdot 3^n - n^2 - 3n - 3 + 2n3^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((2n+17)3^n - n^2 - 3n - 3\right)$$

Kontrollräkning:

$$a_n - 3a_{n-1} = \frac{1}{2}\left((2n+17)3^n - n^2 - 3n - 3\right)$$

$$- \frac{3}{2}\left((2(n-1)+17)3^{n-1} - (n-1)^2 - 3(n-1) - 3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big((2n+17)3^n - n^2 - 3n - 3 - ((2(n-1)+17)3^n +$$
$$+ 3(n^2-2n+1) + 9(n-1) + 9\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big((2n+17-2(n-1)-17)3^n + (-1+3)n^2$$
$$+ (-3-6+9)n + (-3+3-9+9)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 \cdot 3^n + 2n^2\right) = 3^n + n^2$$

$\square$

57 Hur många n-siffriga tal med 1:or och 2:or varav minst en 1:a och en 2:a?

De enda kombinationer som inte innehåller minst en 1:a och en 2:a är den med bara 1:or och den med bara 2:or, alltså 2 st.
Totalt för var och en av av de n positionerna välja mellan 2 tal (1:a eller 2:a) varmed, enligt multiplikationsprincipen 2^n olika tal varav $2^n - 2$ med minst en 1:a och en 2:a.

$\square$

59a) För första platsen kan man välja mellan 6 personer

För andra " " " " " 5 "

⋮

För sjätte " " " " " 1 "

Totalt $6! = 720$ sätt

b) Antag att personerna heter A, B, C, D, E, F. I en ring är "kön" (A, B, C, D, E, F) ekvivalent med (B, C, D, E, F, A) som är ekvivalent med (C, D, E, F, A, B) o.s.v. eftersom ringen saknar början och slut till skillnad från kön. Därför får man en sjättedel av antalet sätt för kön dvs $5! = 120$ sätt.

60 Det första kan paras med sin motståndare på $2n-1$ olika sätt, det andra kan paras på $2n-3$ sätt, o.s.v. varmed totalt fås

$(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$ sätt

63 Konstant term i $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{32}{x^8}\right)^{20}$?

$$\left(\frac{x^2}{2}+\frac{32}{x^8}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k \left(\frac{32}{x^8}\right)^{20-k}$$

Konstant endast om exponenten till $\frac{x^2}{2}$ är 4 gånger så stor som exponenten till $\frac{32}{x^8}$, dvs $k = 4(20-k)$, dvs $k=\frac{80}{5}=16$ och därmed är konstanten

$$\binom{20}{16}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{16}\left(\frac{32}{x^8}\right)^{20-16} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{x^{32}}{2^{16}}\cdot\frac{32^4}{x^{32}}$$

$$= 5\cdot 19\cdot 3\cdot 17\,\frac{(2^5)^4}{2^{16}} = 95\cdot 51\cdot \underbrace{2^4}_{16} = 77520$$

$$\begin{array}{r} 95 \\ 51 \\ \hline 95 \\ 475 \\ \hline 4845 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4845 \\ 16 \\ \hline 29070 \\ 4845 \\ \hline 77520 \end{array}$$

65 Visa $\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$

$$VL = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{j!(n-k-j)!} = \frac{n!}{k!\,j!(n-k-j)!}$$

$$HL = \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot \frac{(n-j)!}{k!(n-j-k)!} = \frac{n!}{j!\,k!(n-j-k)!} = VL$$

$\square$

---

66. Visa $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$

$$VL = \binom{2n}{2} = \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!} = \frac{1}{2}\,2n(2n-1) = n(2n-1)$$

$$HL = 2\binom{n}{2} + n^2 = 2 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} + n^2 = n(n-1) + n^2 =$$

$$= n^2 - n + n^2 = n(2n-1) = VL$$

$\square$

---

67. $3^n = (2+1)^n \underset{\text{Binomialsatsen}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$

$\square$

Sats 2.1

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{Z} : \begin{Bmatrix} a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b+c) \wedge a|bd \\ a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c \end{Bmatrix}$$

Bevis: $a|b \wedge a|c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists m,n \in \mathbb{Z} : b = ma \wedge c = na$

$\Rightarrow b+c = ma + na = (m+n)a$ vilket är jämnt delbart med a

$\Rightarrow a|(b+c)$.

$a|b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : b = ma$

$\Rightarrow bd = mad$ vilket är jämnt delbart med a

$\Rightarrow a|bd$

$a|b \wedge b|c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists m,n \in \mathbb{Z} : b = ma \wedge c = nb$

$\Rightarrow c = nma$ vilket är jämnt delbart med a

$\Rightarrow a|c$

$\square$

Ex

$$\mathrm{SGD}(2310, 1764) = 42:$$

$$2310 = 1 \cdot 1764 + 546$$

$$1764 = 3 \cdot 546 + 126$$

$$546 = 4 \cdot 126 + 42$$

$$126 = 3 \cdot 42 + 0$$

$$\begin{aligned}
42 &= 546 - 4 \cdot 126 \\
&= 546 - 4 \cdot (1764 - 3 \cdot 546) \\
&= (1 - (4 \cdot (-3)))546 - 4 \cdot 1764 \\
&= (1 - (4 \cdot (-3)))(2310 - 1764) - 4 \cdot 1764 \\
&= (1 - 4 \cdot (-3))2310 + (-4 - (1 - 4(-3)))1764
\end{aligned}$$

Euklides algoritm

$$a = c_1 b + r_1 \qquad 0 \le r_1 < |b|$$

$$b = c_2 r_1 + r_2 \qquad 0 \le r_2 < r_1$$

$$r_1 = c_3 r_2 + r_3 \qquad 0 \le r_3 < r_2$$

$$\vdots$$

$$r_{n-3} = c_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} \qquad r_{n-4} = c_{n-2} r_{n-3} + r_{n-2}$$

$$r_{n-2} = c_n r_{n-1} + d$$

$$r_{n-1} = c\, d + 0$$

Bevis av hjälpsats 2.6 $\forall a,b \in \mathbb{Z}\ \exists x,y \in \mathbb{Z}: \mathrm{SGD}(a,b) = ax + by$

$$\begin{aligned}
d &= r_{n-2} - c_n r_{n-1} \\
&= r_{n-2} - c_n (r_{n-3} - c_{n-1} r_{n-2}) \\
&= (1 + c_n c_{n-1}) r_{n-2} - c_n r_{n-3} \\
&= (1 + c_n c_{n-1})(r_{n-4} - c_{n-2} r_{n-3}) - c_n r_{n-3} \\
&= (1 + c_n c_{n-1}) r_{n-4} - (c_n + c_{n-2}(1 + c_n c_{n-1})) r_{n-3} \\
&\ \ \vdots \\
&= (\dots) r_3 - (\dots) r_2 \\
&= (\dots)(r_1 - c_3 r_2) - (\dots) r_2 \\
&= (\dots) r_1 - (\dots) r_2
\end{aligned}$$

$$\cancel{= (\cdots) r_1 - (\cdots)(b - c_2 r_1)}$$
$$\cancel{= (\cdots) r_1 - (\cdots) b}$$
$$\cancel{= (\cdots)(a - c_1 b) - (\cdots) b}$$
$$\cancel{= (\cdots) a - (\cdots) b}$$

Lite snyggare

$$\vdots$$
$$= C' r_3 - C'' r_2$$
$$= C'(r_1 - c_3 r_2) - C'' r_2$$
$$= C' r_1 - \underbrace{(C'' + c_3)}_{C'''} r_2$$
$$= C' r_1 - C'''(b - c_2 r_1)$$
$$= \underbrace{(C' + c_2)}_{C''''} r_1 - C''' b$$
$$= C''''(a - c_1 b) - C''' b$$
$$= C'''' a - (C''' + c_1) b$$
$$= ax + by \quad x = C'''',\ y = -C''' - c_1 \quad \square$$

Lite kommentarer till slutet av beviset av Sats 2.10 (samband mellan koefficienter och rationella rötter):

$$p(a_1 q^{n-1} + a_2 p q^{n-2} + \dots + a_n p^{n-1}) = -a_0 q^n$$

Här är $a_0, a_1, \dots, a_n, p, q$ heltal

$\Rightarrow a_1 q^{n-1} + a_2 p q^{n-2} + \dots + a_n p^{n-1} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow -a_0 q^n$ är en multipel av p

$\Rightarrow p \mid a_0 q^n$.

Vi har antagit att $p \nmid q$.

Detta innebär att $p \nmid q^n$.

Men om $p \mid a_0 q^n$ så måste alltså $p \mid a_0$.

Vi kom fram till att

$$q^n f\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} q + a_n p^n = 0$$

$\Rightarrow$

$$q\underbrace{\left(a_0 q^{n-1} + a_1 p q^{n-2} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1}\right)}_{\text{heltal}} = -a_n p^n$$

$\Rightarrow$ $-a_n p^n$ multipel av q

$\Rightarrow$ $q \mid a_n p^n$

Men $q \nmid p$ så $q \nmid p^n$.

Så om $q \mid a_n p^n$ måste $q \mid a_n$.

Alltså: $p \mid a_0$ och $q \mid a_n$

$\square$

Kommentar till induktion

Ind. principen

$$P_0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : P_n \Rightarrow P_{n+1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : P_n$$

Så antag t.ex. att P_n är en ekvation som har n som parameter dvs $V(n) = H(n)$.

För att visa detta för alla $n \in \mathbb{N}$ visar vi först att $V(1) = H(1)$, dvs att påståendet gäller i specialfallet $n = 1$ (basfallet).

Induktionssteget är sedan att vi, <u>med hjälp av att</u> <u>anta</u> att $V(n) = H(n)$ är sant, visar att <u>detta</u> gör att $V(n+1) = H(n+1)$ är sant.

Det är här viktigt att förstå att man utnyttjar <u>antagandet</u> att $V(n) = H(n)$ för att bevisa $V(n+1) = H(n+1)$. (Det är förresten $V(n) = H(n)$ som kallas induktionsantagandet).

Om vi lyckas visa att $V(n+1) = H(n+1)$ utan att utnyttja att $V(n) = H(n)$ är det visserligen ett bevis av påståendet att $V(n) = H(n)$ är sant för alla $n \in \mathbb{N}$ men det är inget <u>induktionsbevis</u>!

För att utnyttja $V(n) = H(n)$ i beviset av att $V(n+1) = H(n+1)$ är det bra om vi kan skriva $V(n+1) = V(n) + v$ och $H(n+1) = H(n) + h$ därför då är

$$V(n+1) = H(n+1) \iff V(n) + v = H(n) + h$$

och <u>här</u> kan vi utnyttja induktionsantagandet $V(n) = H(n)$ för tillsammans med detta och om vi bara lyckas bevisa att $v = h$ så är ju $V(n) + v = H(n) + h$ vilket var vad som skulle visas.

I fallet med summor är ju

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} f(k)}_{V(n+1)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(k)}_{V(n)} + \underbrace{f(n+1)}_{v}$$

I fallet med rekursiv framställning enligt ovan behöver det inte vara rekursion genom addition utan det kan även vara t.ex en multiplikativ relation t.ex. $V(n) = H(n)$ där

$$V(n) = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Då är $V(n+1) = \underbrace{\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}_{=V(n)}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= V(n)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ vilket kan användas i ett induktionsbevis av att $V(n) = \frac{n}{2(n-1)}$ $\square$