18. $p \Delta q \iff (p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))$

"Antingen p eller q sann men inte båda sanna eller båda falska"

a) Ja:

p	q	$(p\vee q)$	$\wedge$	$(\neg(p\wedge q))$	$(p\wedge(\neg q))$	$\vee$	$(q\wedge(\neg p))$
S	S	S	F	F	F	F	F
S	F	S	S	S	S	S	F
F	S	S	S	S	F	S	S
F	F	F	F	S	F	F	F

de är ekvivalenta

b)

p	q	r	$(p\Delta q)$	$\wedge r$	$\iff$	$(p\wedge r)$	Δ	$(q\wedge r)$
S	S	S	F	F	S	S	F	S
S	S	F	F	F	S	F	F	F
S	F	S	S	S	S	S	S	F
S	F	F	S	F	S	F	F	F
F	S	S	S	S	S	F	S	S
F	S	F	S	F	S	F	F	F
F	F	S	F	F	S	F	F	F
F	F	F	F	F	S	F	F	F

22 b) $(ABCD)_{16}$ decimalt:

$A = 10$, $B = 11$, $C = 12$, $D = 13$

$(ABCD)_{16} = A \cdot 16^3 + B \cdot 16^2 + C \cdot 16^1 + D \cdot 16^0$

$= 10 \cdot 4096 + 11 \cdot 256 + 12 \cdot 16 + 13 = 43981$

19. Visa att $8 \mid a^2-1$ om a udda

a udda $\Rightarrow$ $a = 2m+1$, ngt $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $a^2-1 = (2m+1)^2-1 = 4m^2+4m+1-1$

$= 4m(m+1)$

Heltalet m är antingen udda eller jämnt.

m udda $\Rightarrow \exists k : m = 2k+1$

$\Rightarrow 4m(m+1) = 4(2k+1)(2k+1+1) =$

$= 8(2k+1)(k+1)$ vilket är delbart med 8.

m jämnt $\Rightarrow \exists k : m = 2k$

$\Rightarrow 4m(m+1) = 4(2k)(2k+1) = 8k(2k+1)$

vilket också är jämnt delbart med 8.

20 Visa att

$n^3 - n$ är jämnt delbart med 6.

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$$

~~Återigen är n antingen udda eller jämnt.~~

~~n udda ⇒ n = 2k+1 ⇒ n³ − n =~~

~~= (2k+1)(2k+2)(2k) =~~

$n = 3k$, $3k+1$ eller $3k+2$

$\boxed{3k}$ $n^3 - n = \cancel{27k^3 - 3k} =$

~~3k(3k+1)(3k−1)~~ ~~(9k² − 1)~~ $3k(3k+1)(3k-1)$ delbart med 3 ok.

$\boxed{3k+1}$ $n^3 - n = (3k+1)(3k+2)3k$ delbart med 3 ok.

$\boxed{3k+2}$ $n^3 - n = (3k+2)(3k+3)(3k+1) =$

$= 3(3k+2)(k+1)(3k+1)$ delbart med 3 ok.

Vidare är n antingen udda eller jämnt.

$\boxed{2k}$ $n^3 - n = 2k(2k+1)(2k-1)$ jämnt

$\boxed{2k+1}$ $n^3 - n = (2k+1)(2k+2)2(k\cancel{+1-1})$ jämnt

Alltså $2 \mid n^3 - n$ och $3 \mid n^3 - n \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot 3 = 6 \mid n^3 - n.$ $\square$

27.

Eukl. alg. för polynom:

$$x^3-6x^2+11x-6 = x^3-7x^2+12x-6 + x^2-x$$

$$x^3-7x^2+12x-6 = (x^2-x)(x-6) + 6x-6$$

$$x^2-x = \tfrac{1}{6}x(6x-6) + 0$$

Alltså är $6x-6$ dvs $x-1$ =

$= SGD(x^3-6x^2+11x-6, x^3-7x^2+12x-6)$

och det gemensamma nollstället

är alltså $x = 1$.

28. $x^4-4x^3-x^2+16x-12 = x^4-5x^3-3x^2+17x-10$
$+x^3+2x^2-x-2$

$$x^4-5x^3-3x^2+17x-10 = \underbrace{(x^3+2x^2-x-2)(x-7)}_{\left(\begin{array}{l} x^4+(2-7)x^3+(-14-1)x^2+(7-2)x+14 \\ x^4-5x^3-15x^2+5x+14 \end{array}\right)} +$$
$$+12x^2+12x-24$$

$$x^3+2x^2-x-2 = \underbrace{12(x^2+x-2)\tfrac{1}{12}(x+1)}_{x^3+2x^2-x-2} + 0$$

$$SGD(x^4-4x^3-x^2+16x-12, x^4-5x^3-3x^2-3x^2+17x-10) = x^2+x-2$$

varmed gemensamma nollställen fås av

$$x^2+x-2=0$$
$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

29. I fjol var det skottår 2004

(2002-09-23 är dag nr

$\underbrace{31+28+31+30+31+30+\overset{\text{juli}}{31}+\overset{\text{aug}}{31}}_{155+88\,=\,243}+23$)

Kvar på året $365-(243+23)=99$

$2219-2002=217$ år framåt

varav det 2219:e endast

räknar $243+10=253$ dagar

(En fjärdedel av de 216 åren) -2

är skottår : 52 skottår

Två sekel-skiften där 4∤21 och 4∤22

Totalt antal dagar

$99+216\cdot 365+52+253=79244$

Om vi nu räknar (mod 7) fås

$79244 \equiv 79244-77000=2244\equiv$

$\equiv 2244-2100=144\equiv 144-140=4$

Därmed borde 10 september 2219

bli en måndag $+4$ = fredag.

$\square$

31. Antag att

a är ett tal skrivet med basen 10 dvs

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$
$$= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k$$

Men då är (mod 9)

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$
$$\equiv a_n (10-9)^n + a_{n-1}(10-9)^{n-1} + \dots + a_1(10-9) + a_0$$
$$= a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

vilket är siffersumman!

Observera att detta bevis håller i båda riktningarna!

32. Visa att $\nexists x : 4 \mid x^3 - 2$

Antag motsatsen, dvs att

$\exists x : x^3 - 2 = 4m$ något

heltal m.

$\Rightarrow x^3 = 2 \cdot (2m+1) \Rightarrow \frac{x^3}{2} = 2m+1$

dvs ett udda tal. Men

$\frac{x^3}{2}$ kan aldrig vara udda.

Ty antingen x udda varmed

x^3 udda så x^3 ej delbart med 2.

Eller x jämnt men då är

x^3 jämnt delbart med 8

varmed $\frac{x^3}{2}$ ej udda.

$\Rightarrow\!\Leftarrow$

Alltså $\nexists x : 4 \mid x^3 - 2$

(Man hade även kunnat använda metodiken från uppg 20: $x = 4m, 4m+1, 4m+2$ eller $4m+3$ och visa att 4 ej delar $x^3 - 2$ i något av fallen)

33a)

$5x+6y=113 \quad (*)$

$SGD(5,6)=1$

Löser först $5x+6y=1$

Uppenbarligen lösningen

$(x,y)=(-1,1)$ vilket innebär att

$113(-1,1)$ är en lösning till $(*)$

och den fullständiga lösningen

$\{(-113+6m,\ 113-5m) : m\in\mathbb{Z}\}$

$=\{(-113+6\cdot19+6m,\ 113-5\cdot19-5m) : m\in\mathbb{Z}\}=\{(1+6m,\ 18-5m) : m\in\mathbb{Z}\}$

Med Eukl. alg. hade vi fått

$6=1\cdot5+1 \quad (**)$

$5=5\cdot1+0$ varmed $SGD(5,6)=1$

Baklänges

$(**)$: $6-1\cdot5=1$

$5\cdot(-1)+6\cdot1=1$

33 b)

$13x + 7y = 576$

Återigen $SGD(13,7) = 1$

och partikulärlösning ej svår:

$(x, y) = (-1, 2)$

$\Rightarrow$ Allmänlösning:

$\{(-576 + 7m, 2 \cdot 576 - 13m) : m \in \mathbb{Z}\}$

$= \{(\overset{m=83}{5}, 73), (\overset{m=84}{12}, 60), (19, 47),$

$(26, 34), (33, 21), (40, 8)\}$

34. $35x + 45y = 10\,000$ där x = antal barnbiljetter och y = antal vuxenbiljetter

$SGD(35,45) = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~Hjälpekv~~ $7x + 9y = 2000$

Ekvivalent ekv.

Eukl. alg.

$9 = 1\cdot 7 + 2$

$7 = 3\cdot 2 + 1$

$\Rightarrow 1 = 7 - 3\cdot 2 = 7 - 3(9-7) = 4\cdot 7 - 3\cdot 9$

$\Rightarrow (x_p, y_p) = 2000\cdot(4,-3) = (8000, -6000)$

$\Rightarrow (x,y) = (8000 - 9m, -6000 + 7m)$

Vi vill veta maximalt x och eftersom $y \geq 0$ vill vi använda m så att y minimalt

$$\begin{array}{r} 857 \\ 7\,\overline{)6000} \\ 56 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline 50 \\ 49 \\ \hline 1 \end{array}$$

$\Rightarrow m = 858 \Rightarrow y = -6000 + 7\cdot 858 = 6 \geq 0$

$x = 8000 - 9\cdot 858 = 8000 - 7722 = 278$

Alltså kan högst 278 barnbiljetter ha sålts.

$\boxed{1}$

35 Finn n mellan 1111 och 3333 sådant att

$n - 100 = 101x \quad (1)$

$n - 10 = 11y \quad (2)$

$(1)-(2): \; 101x - 11y = -90$

$101 = 9 \cdot 11 + 2$

$11 = 5 \cdot 2 + 1$

$2 = 2 \cdot 1 + 0$

$101x - 11y = 1$ löses av

Eukl. baklänges $11 - 5 \cdot 2 = 1$

$11 - 5 \cdot (101 - 9 \cdot 11) = 1$

$11 \cdot (1 + 45) - 101 \cdot 5 = 1$

$101 \cdot (-5) - 11 \cdot (-46) = 1$

Partikulärlösn. till hjälpekv. $(x, y) = (-5, -46)$

Partikulärlösn. till fullst. ekv. $(x, y) = -90(-5, -46) = (450, 4140)$

Fullständig lösn.

$\{(450 - 11m, 4140 - 101m) : m \in \mathbb{Z}\}$

$m = 40 \quad (10, 100) \Rightarrow n = 1010 + 100 = 1110$

$m = 41 \quad (-1, -1) \Rightarrow n = -1$

$m = 39 \quad (21, 201) \Rightarrow n = 2221$

$(32, 302) \quad n = 3332$

36 $\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k+5) = \frac{n(2n+7)(n+7)}{6}$

Basfall $n=1$: $(1+1)(1+5) = 12$

$\frac{1\cdot(2+7)(1+7)}{6} = \frac{72}{6} = 12$ ok!

Ind. ant. $\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k+5) = \frac{n(2n+7)(n+7)}{6}$ (*)

Ind. steg Visa $\sum_{k=1}^{n+1} (k+1)(k+5) = \frac{(n+1)(2(n+1)+7)(n+8)}{6}$

$VL = \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)(k+5) \overset{(*)}{=} \frac{n(2n+7)(n+7)}{6} + (n+1+1)(n+1+5) =$

$= \frac{1}{6}(2n^3+21n^2+49n+6n^2+6\cdot 8n+6\cdot 12)$

$= \frac{1}{6}(2n^3+27n^2+97n+72)$

$HL = \frac{1}{6}(n+1)(2n+9)(n+8) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+25n+72)$

$= \frac{1}{6}(2n^3+25n^2+72n+2n^2+25n+72)$

$= \frac{1}{6}(2n^3+27n^2+97n+72) = VL$

Alltså är satsen bevisad enl. induktionsprincipen.

$\square$

39 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^{-k} = 2-(n+2)2^{-n} = 2(1-(n-2)2^{-n-1})$

Basfall $n=1$ $VL = 1\cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$HL = 2-(1+2)2^{-1} = 2-\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ (ok!)

Ind. ant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^{-k} = 2-(n+2)2^{-n}$ (*)

Ind. steg Visa $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k2^{-k} = 2-(n+3)2^{-n-1}$

$$VL = \sum_{k=0}^{n+1} k2^{-k} \overset{(*)}{=} 2-(n+2)2^{-n} + (n+1)2^{-(n+1)}$$

$$= 2 - n\underbrace{2^{-n}}_{2\cdot 2^{-n-1}} - 2\cdot\underbrace{2^{-n}}_{2\cdot 2^{-n-1}} + n2^{-n-1} + 2^{-n-1}$$

$$= 2 + (-2n-4+n+1)2^{-n-1}$$

$$= 2 + (-n-3)2^{-n-1}$$

$$= 2-(n+3)2^{-n-1} = HL$$

40 Visa $4 \mid 7^n + 3^{n+1}$

Vi har (mod 4) att

$7^n + 3^{n+1} \equiv (7-4)^n + 3 \cdot 3^n =$

$= 3^n + 3 \cdot 3^n = (1+3)\,3^n =$

$= 4 \cdot 3^n \equiv 0$

$\square$

42. $49 \mid 8^n - 7n - 1$

Basfall: $n=1$ $8^n - 7n - 1 = 0$ (ok)

Ind.ant. $49 \mid 8^n - 7n - 1 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}$:

$8^n - 7n - 1 = 49m \Rightarrow 8^n - 1 = 49m + 7n$ (*)

Ind.steg Visa $49 \mid 8^{n+1} - 7(n+1) - 1$

$8^{n+1} - 7(n+1) - 1 = 8 \cdot 8^n - 7n - 7 - 1 =$

$= 8(8^n - 1) - 7n \overset{(*)}{=} 8(49m + 7n) - 7n$

$= 8 \cdot 49m + (8-1)7n = (8m + n)49$

$\square$

48. $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ $\quad f_0 = 0,\ f_1 = 1$

Visa $f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$

Basfall $n=0$: $f_0^2 = 0 = 0 \cdot 1 = f_0 \cdot f_1$ (ok!)

Ind. ant: Antag $f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ $(*)$

Ind. steg: Visa $f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{n+1} f_{n+2}$

$$
\begin{aligned}
VL &= f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_n^2 + f_{n+1}^2 \\
&\overset{(*)}{=} f_n f_{n+1} + f_{n+1}^2 \\
&= (f_n + f_{n+1}) f_{n+1} \\
&= f_{n+2} f_{n+1} = HL
\end{aligned}
$$

$\square$

49 b) $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$

$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$

Kar. ekv. $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$\Rightarrow x_n = A2^n + B3^n$

d) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 2^{n+1}$

Hom. ekv. $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

$\Rightarrow x_{hn} = A \cdot 1^n + B2^n = A + B2^n$

Part. lösn. Ansätter $x_n = z_n 2^{n+1}$ varmed

$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = z_{n+2}2^{n+3} - 3z_{n+1}2^{n+2} + 2z_n 2^{n+1} = 2^{n+1}$

$\Rightarrow 4z_{n+2} - 6z_{n+1} + 2z_n = 1$ (efter div. med 2^{n+1})

Ansätter $z_n = cn$

$4c(n+2) - 6c(n+1) + 2cn = 1$

$c(4 \cdot 2 - 6 + 2) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow z_n = \frac{n}{4} \Rightarrow x_{pn} = \frac{n}{4} 2^{n+1}$

Allm. lösn. $x_n = x_{hn} + x_{pn} = A + B2^n + \frac{n}{4}2^{n+1} =$

$= 2^n\left(\frac{n}{2} + B\right) + A$