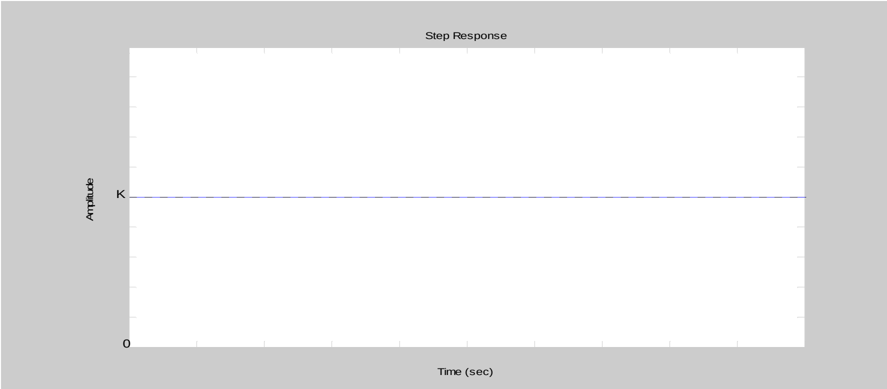
100318/Thomas Munther
IDE-sektionen/Högskolan i Halmstad

Formelsamling Reglerteknik

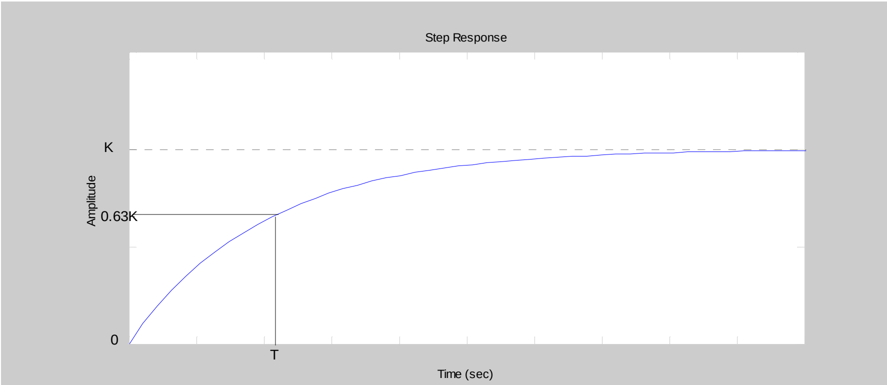
Samband mellan stegsvar och överföringsfunktion
(insignalen u är nedan ett steg med amplitud = 1 som appliceras vid t=0, där K är allmänt Δy/Δu)

Process med P-verkan:



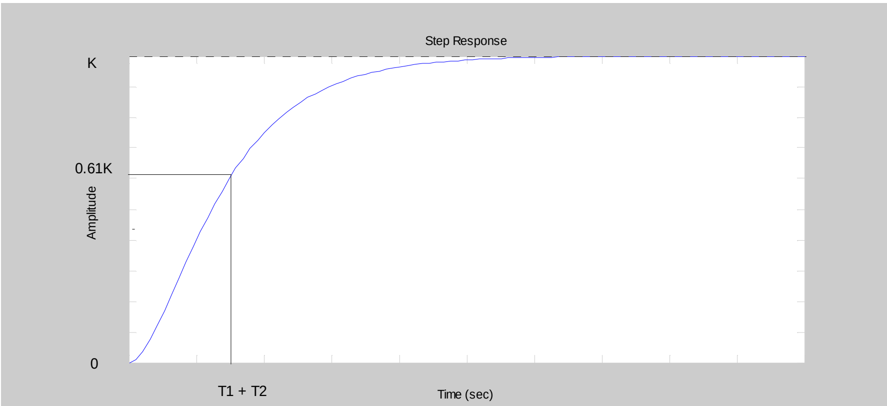
G(s) = K

Process med en tidskonstant:



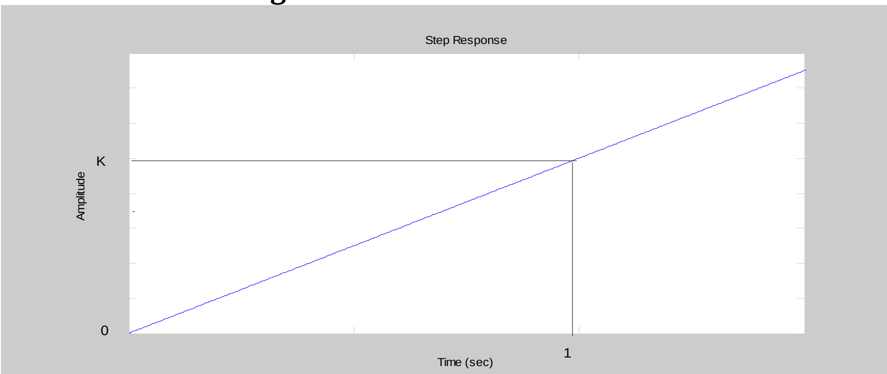
G(s) = $\frac{K}{1+Ts}$

Process med två tidskonstanter:



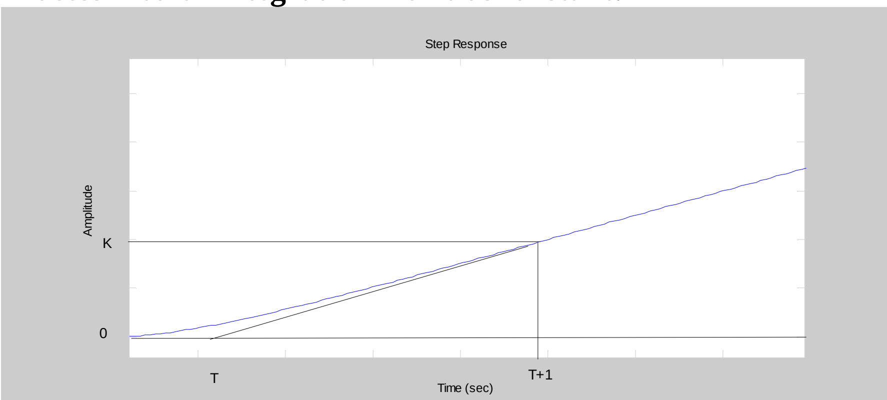
G(s) = $\frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$

Process med en integration:



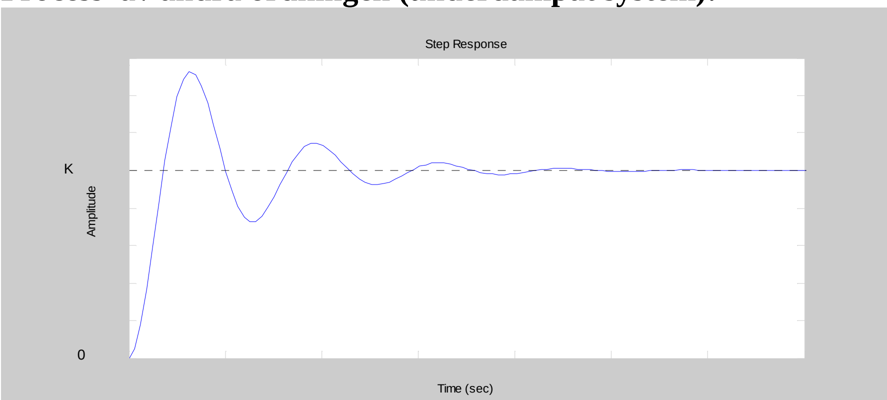
$$G(s) = \frac{K}{s}$$

Process med en integration + en tidskonstant:



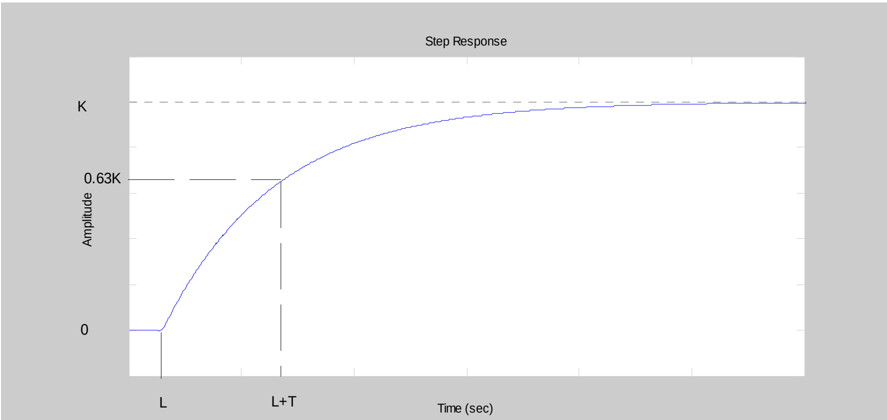
$$G(s) = \frac{K}{s(1+Ts)}$$

Process av andra ordningen (underdämpat system):



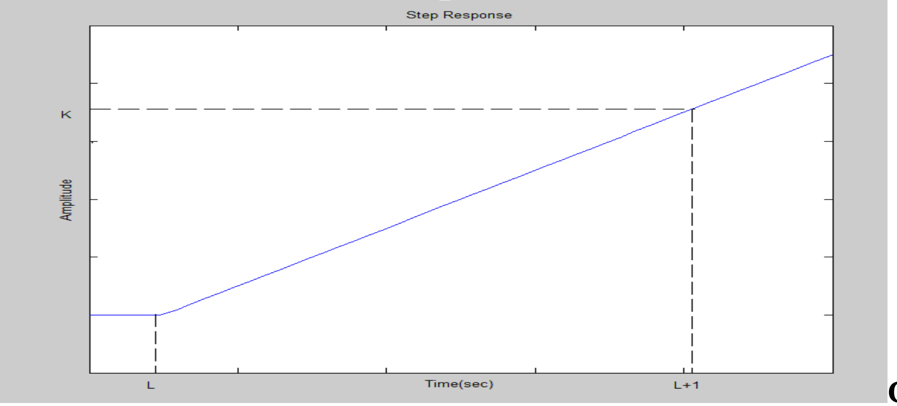
$$G(s) = \frac{K\omega_0^{\;2}}{s^2+2\varsigma\omega_0 s+\omega_0^{\;2}}$$

Process med en tidskonstant + dödtid:



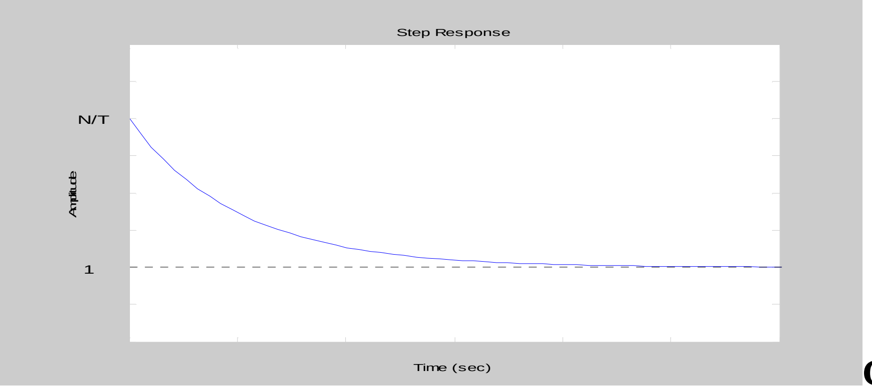
$$G(s) = \frac{Ke^{-sL}}{1+Ts}$$

Process med en integration + dödtid:



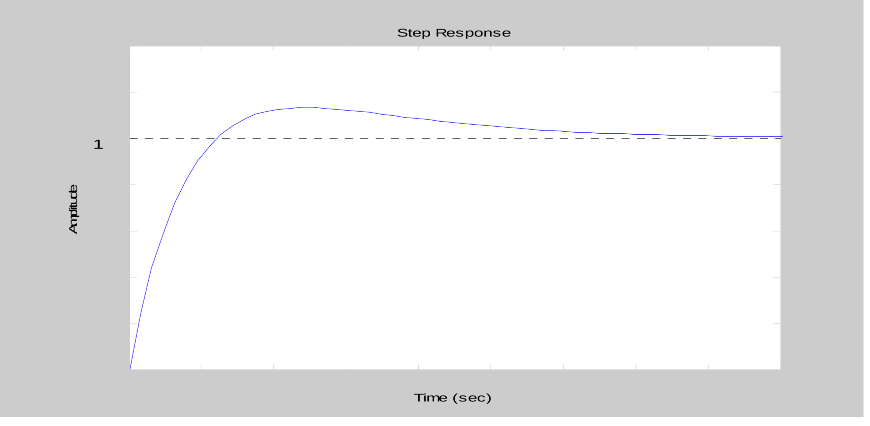
$$G(s) = \frac{Ke^{-sL}}{s}$$

Process av första ordningen med dominant nollställe N>T



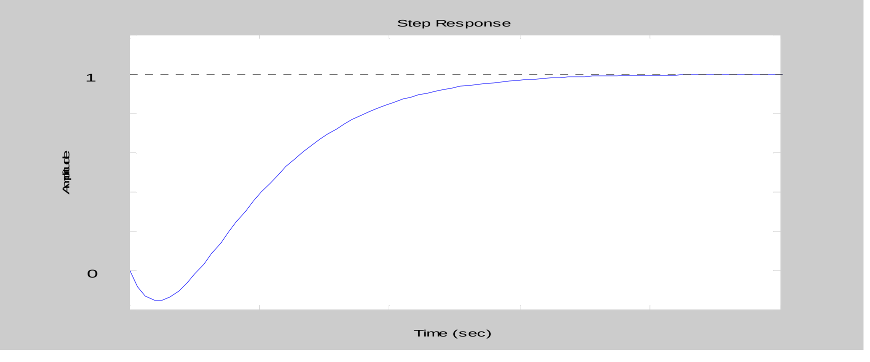
$$G(s)=\frac{1+Ns}{1+Ts}$$

Process med två tidskonstanter och dominant nollställe N >max{T_1, T_2 }



$$G(s)=\frac{1+Ns}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

Process med två tidskonstanter och nollställe HHP



$$G(s)=\frac{1-Ns}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

Tumregelmetoder för PID-regulatorer

Parameterinställning av PID-regulator enligt **Ziegler-Nichols självsvängningsmetod**.

Regulator\parameter	K	Ti	Td
P-reg	0.5Ko	-	-
PI_reg	0.45Ko	To/1.2	-
PID-reg	0.6Ko	To/2	To/8

To är periodtiden för självsvängning, Ko förstärkningen vid denna.

Parameterinställning av PID-regulator enligt **Ziegler-Nichols stegsvarsmetod**.

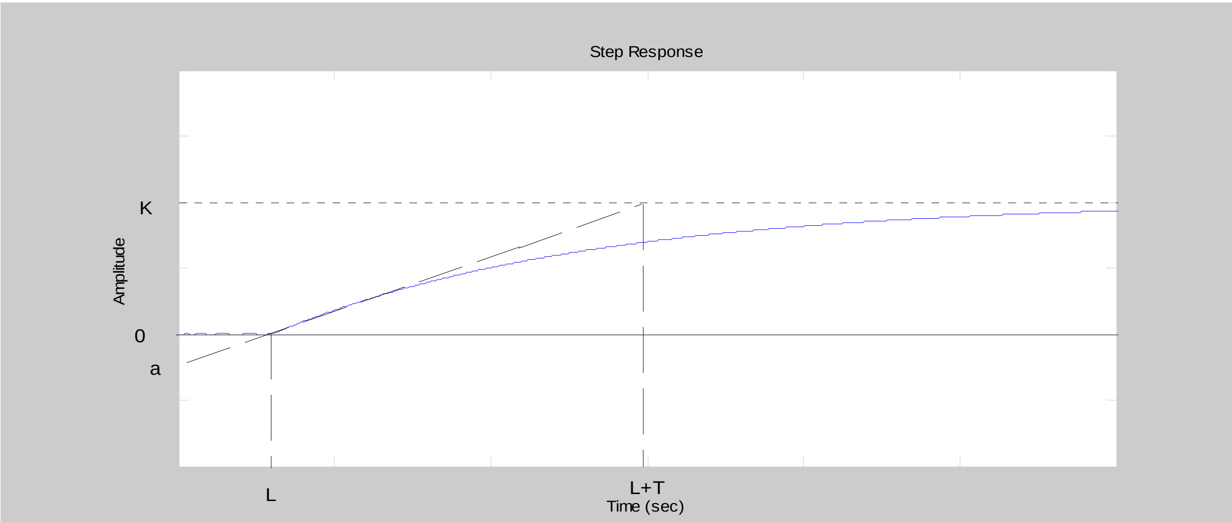
Regulator\parameter	K	Ti	Td
P-reg	T/(K_pL)	-	-
PI_reg	0.9T/(K_pL)	3L	-
PID-reg	1.2 T/(K_pL)	2L	L/2

K_p förstärkning hos process samt T och L parametrar i stegsvaret.

Parameterinställning av PID-regulator enligt **Chien, Hrones & Reswicks stegsvarsmetod**.

Regulator\parameter	K	Ti	Td
P-reg	0.3/a	-	-
PI_reg	0.35/a	1.2T	-
PID-reg	0.6/a	T	L/2

Parameter a avläses i stegsvaret enligt nedan. T och L är vanliga parametrar i stegsvaret.



Stegsvar som används för att avläsa enligt Chien, Hrones & Reswicks stegsvarsmetod. Notera att a avläses m h a en tangent i en punkt där derivatan är maximal.

Lambdametoden baseras också på ett stegsvar och en process: $G(s) = \frac{K_p e^{-sL}}{1+Ts}$.

λ= p*M, där $1 \leq p \leq 3$ och M= max(L,T). Notera att K_p är processförstärkningen.

Regulator	K	Ti
PI-reg	T/(K_p(λ+L))	T

Statiska (kvarstående) fel, e_{ss} i återkopplade reglersystem.
Notera följande: m är typtalet i reglersystemet. Konstanterna K_0, K_1 och K_2 är LF-förstärkningen hos kretsöverföringen.

	m=0	m=1	m=2
Steg	1/(1+Ko)	0	0
Ramp	∞	$1/K_1$	0
Parabel	∞	∞	$1/K_2$

Slutvärdesatsen: $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s F(s)$

Process av andra ordningen (underdämpat system): G(s) = $\frac{K\omega_0^2}{s^2+2\varsigma\omega_0 s+\omega_0^2}$

Stigtid: $t_r = \frac{2.16\varsigma+0.60}{\omega_0}$, där $0.3 \le \quad \le 0.6$

Insvängningstid (5%): $t_s = \frac{1}{\varsigma\omega_0} \ln\left(\frac{20}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\right)$

Insvängningstid (2%): $t_s = \frac{4}{\varsigma\omega_0}$

Peaktiden: $t_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\varsigma^2}}$

Maximal översväng $(y_{max} - y_{ss})/ y_{ss}$: M= $e^{-\frac{\varsigma\pi}{\sqrt{1-\varsigma^2}}}$

Dämpad egensvängning: $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\varsigma^2}$

Resonansfrekvens: $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-2\varsigma^2}$

Resonanstopp: $M_p = \frac{1}{2\varsigma\sqrt{1-\varsigma^2}}$, $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$M_p = 1$, $\zeta \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$

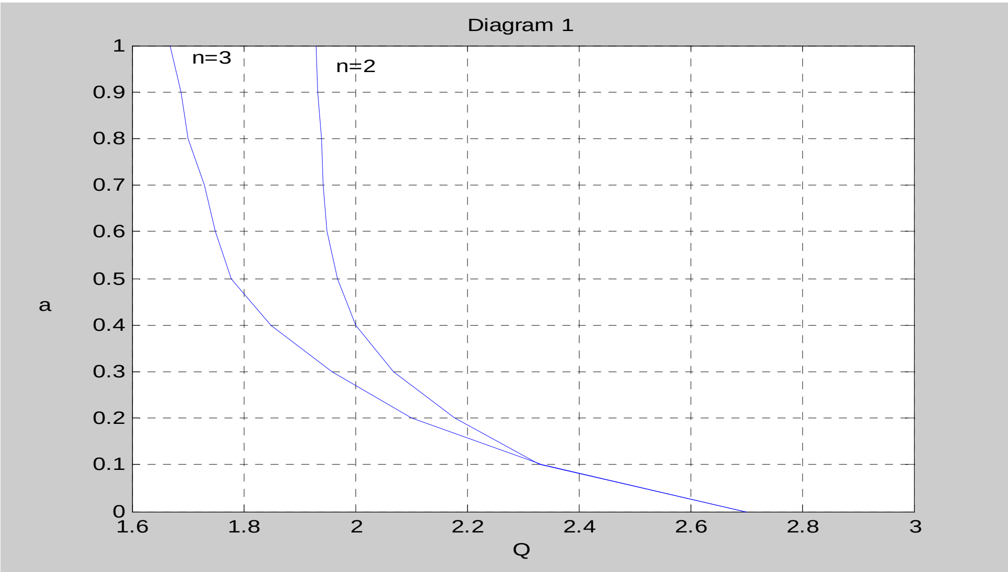
Process med två tidskonstanter: **G(s) =** $\frac{K}{(1+Ts)(1+aTs)}$

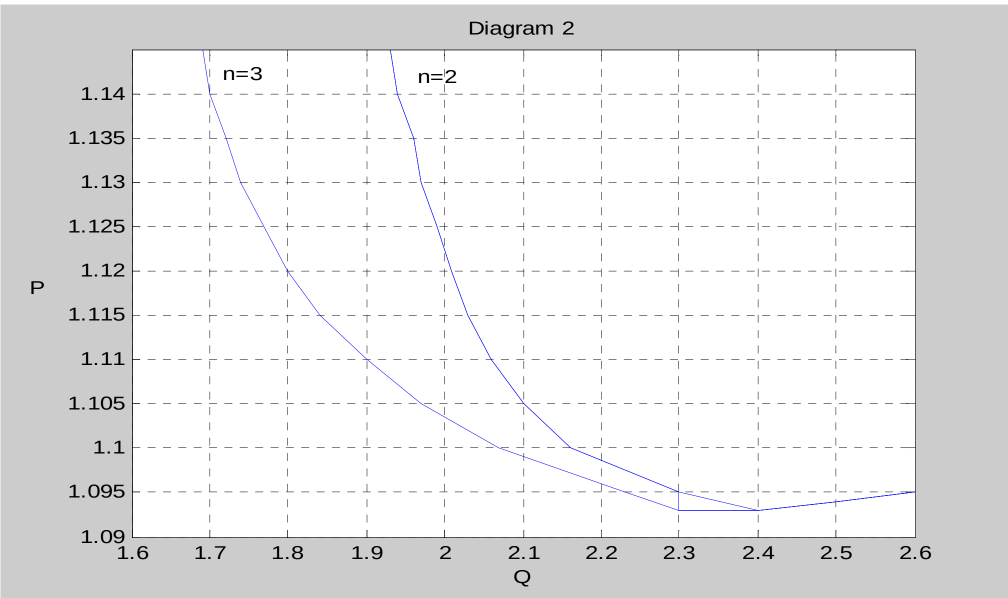
T = $\frac{t_{2/3}}{P(1+a)}$, notera att parametrar P och a avläses ur diagram 1 och diagram 2.

Q= $\frac{t_{2/3}}{t_{1/3}}$, notera att $t_{1/3}$ och $t_{2/3}$ är tider som avläses ur stegsvaret.

Process med tre tidskonstanter: **G(s) =** $\frac{K}{(1+Ts)(1+aTs)(1+a^2Ts)}$

T = $\frac{t_{2/3}}{P(1+a+a^2)}$ Q= $\frac{t_{2/3}}{t_{1/3}}$





Mekaniska system:

Newtons II:a lag $\sum F = M \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

Fjäder: F =k x,
x- förskjutningen från jämviktsläge [m].
k- fjäderkonstant [N/m]

Dämpare: $F = b \frac{dx}{dt}$
b- dämpkonstant [Ns/m]
$\frac{dx}{dt}$ - hastighetsförändring från sitt jämviktsläge [m/s]

Bodediagram med grundfaktorer

Decibel (dB) = $20\log|G(j\omega)|$
Oktav = frekvenskvot 2:1 eller 1:2
Dekad = frekvenskvot 10:1 eller 1:10
Lutning= $\pm$ m*20dB/dekad, där m är ett heltal.

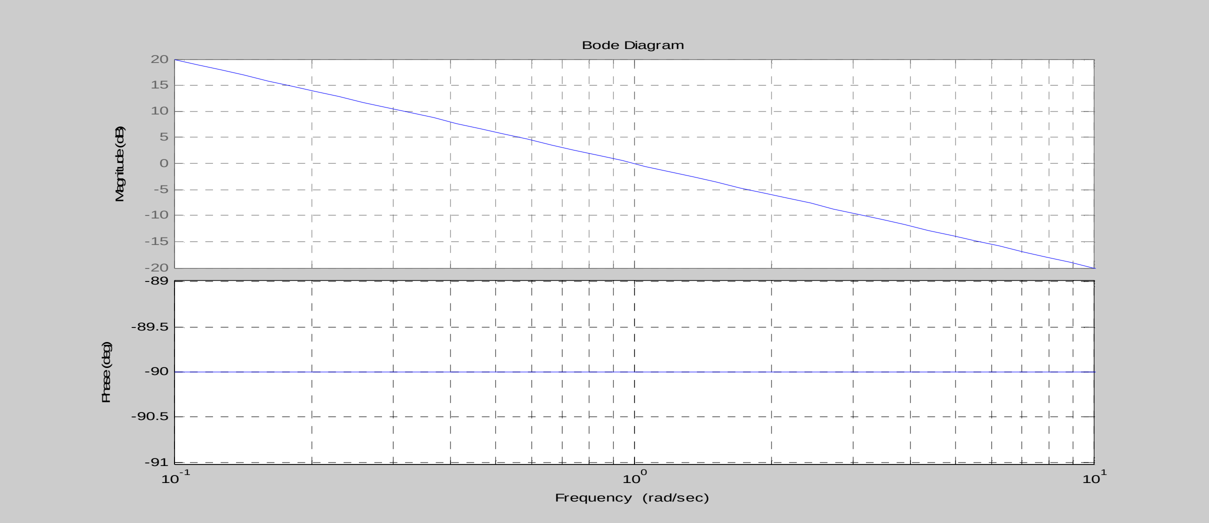
Frekvensfunktionen: $G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$
Fasfunktionen: arg {G(jω) } = arg {G_1(jω) } + arg {G_2(jω) }
Amplitudfunktionen: $|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)|$ eller
$20\log|G(j\omega)| = 20\log|G_1(j\omega)| + 20\log|G_2(j\omega)|$

Följande grundfaktorer förekommer hos en linjär överföringsfunktion:

K s 1/s (1 + Ts) e^{-Ls} 1/(1+Ts) eller 1/(1 + 2ζsT + s^2T^2)

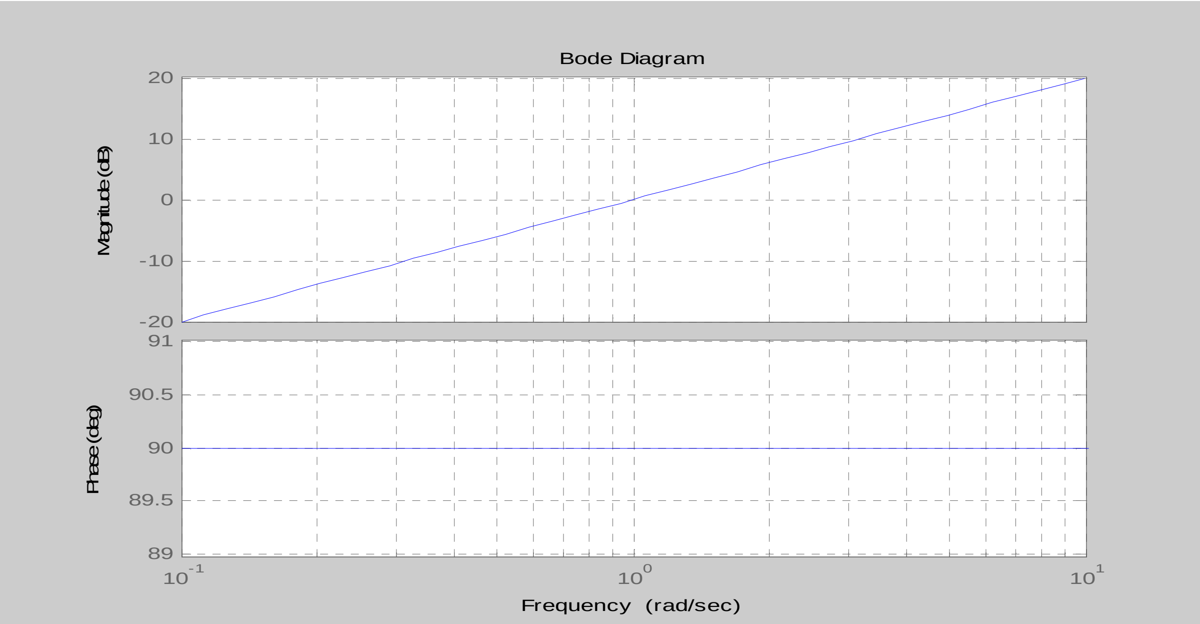
Nedan kommer visas respektive Bodediagram.

Integration: G(s) = 1/s
Amplitudfunktion: $|G(\omega)| = 1/\omega$ Fasfunktion: arg{G(ω)}= -90°



Derivering: G(s)=s

Amplitudfunktion: $|G(\omega)| = \omega$ Fasfunktion: arg{G(ω)}=90°



Dödtidsfaktor: G(s)=e^{-sL}

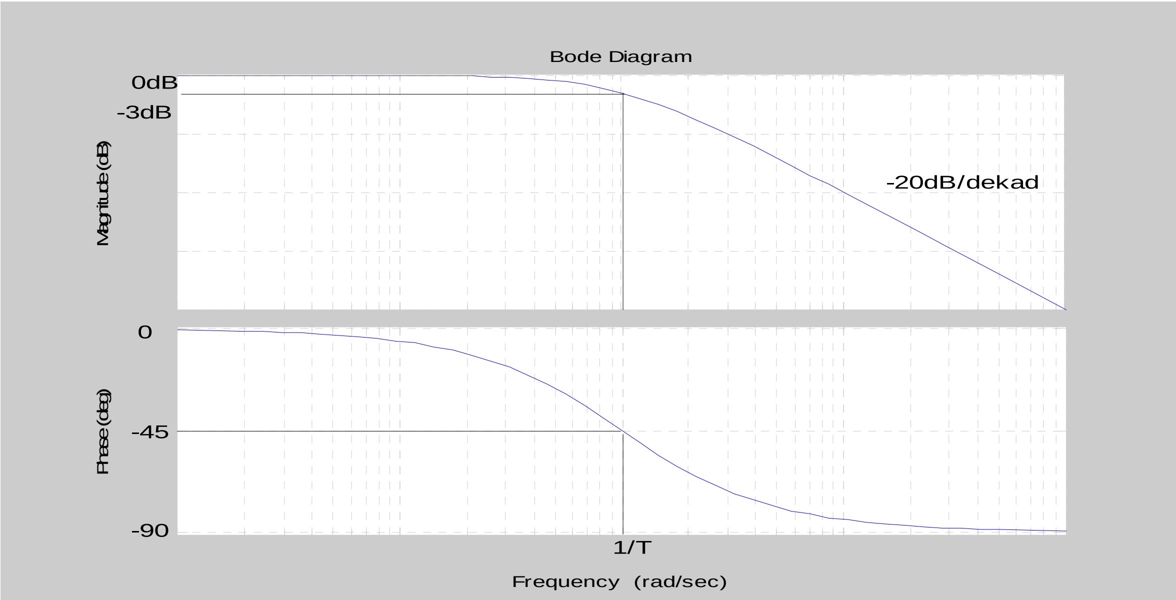
Amplitudfunktion: $|G(\omega)| = 1$ Fasfunktion: arg{G(ω)}= - ωL 180°/π

Konstant förstärkningsfaktor: G(s)=K

Amplitudfunktion: $|G(\omega)| = K$ Fasfunktion: arg{G(ω)}= 0°

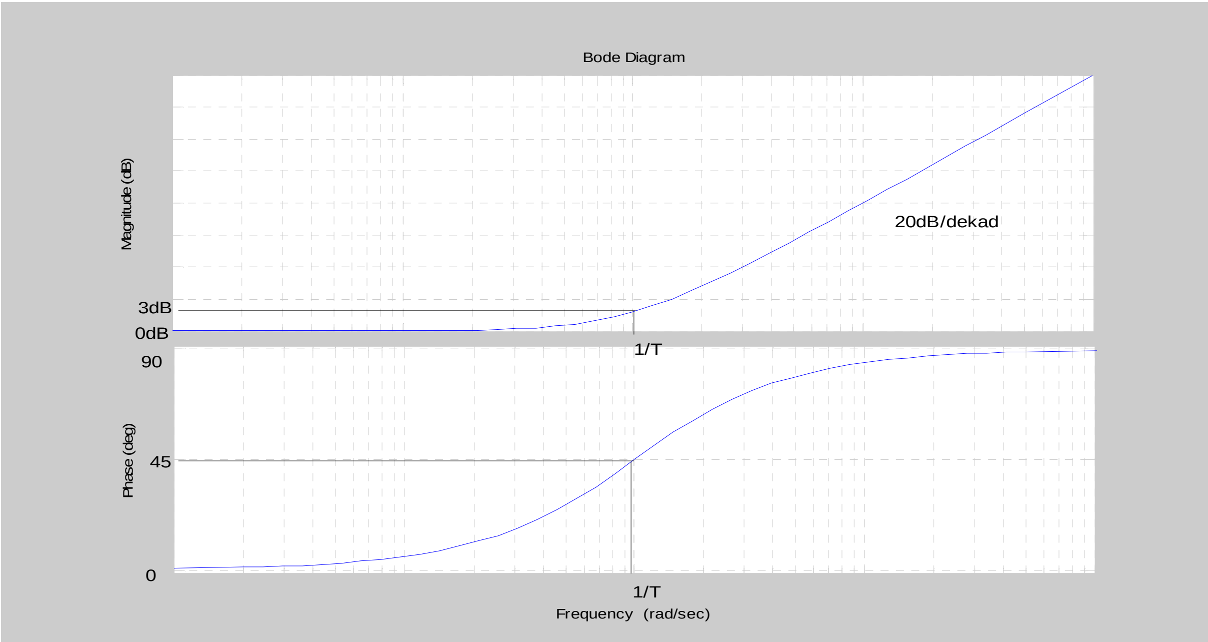
Förstagradsfaktor i nämnaren: G(s) = 1/(1+Ts)

Amplitudfunktion: $|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}$ Fasfunktion: arg{G(ω)}= -arctan(Tω)



Förstagradsfaktor i täljaren: G(s) = 1+Ts

Amplitudfunktion: $|G(\omega)| = \sqrt{1+(T\omega)^2}$ Fasfunktion: arg{G(ω)}= arctan(Tω)

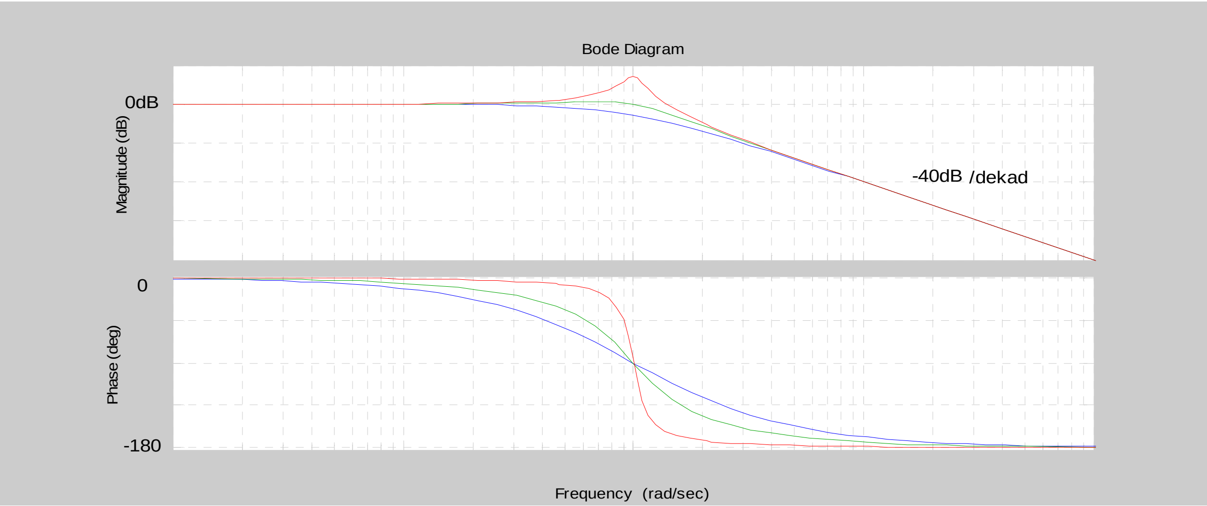


Andragradsfaktor i täljaren: G(s)= $\frac{1}{1+2\varsigma Ts+T^2s^2}$

Amplitudfunktion: $|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2+(2\varsigma T\omega)^2}}$

Fasfunktion: arg{G(ω)}= -arctan $\left(\frac{2\varsigma T\omega}{1-T^2\omega^2}\right)$, för ω< 1/T

arg{G(ω)}= -arctan $\left(\frac{2\varsigma T\omega}{1-T^2\omega^2}\right)$ -180° , för ω>1/T



Kurvorna ovan är ritade för ζ=0.1, 0.5 och 1

Routh-Hurwitz stabilitetskriterium: utgår från karakteristiska ekvationen i form av ett polynom.

$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + a_3s^{n-3} + a_4s^{n-4} + \ldots = 0$

Koefficienterna förs in i en tabell enligt nedan:

Första kolumnen utvärderas för att bestämma stabiliteten

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7
s^{n-2}	c_0	c_1	c_2	c_3
s^{n-3}	d_0	d_1	d_2	d_3
. . .	. . . .	.	.	.
s^0				

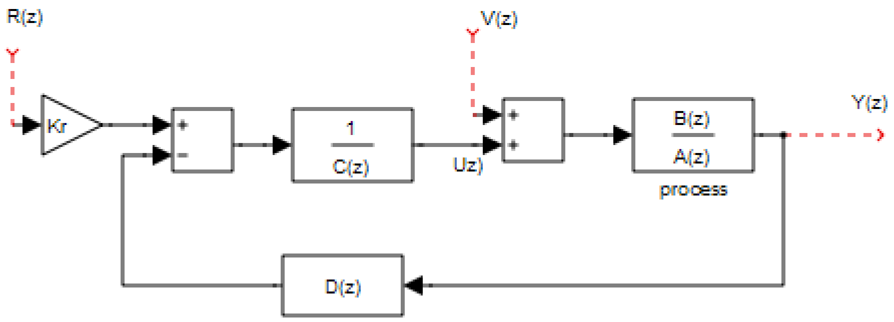
$c_0 = \frac{a_1a_2-a_3a_0}{a_1}$, $c_1 = \frac{a_1a_4-a_5a_0}{a_1}$, $c_2 = \frac{a_1a_6-a_7a_0}{a_1}$,

$d_0 = \frac{c_0a_3-c_1a_1}{c_0}$, $d_1 = \frac{c_0a_5-c_2a_1}{c_0}$, o s v samma procedur tills vi har nått sista raden.

Analog PID-regulator:

Regulator	**Funktion**	**Överföringsfunktion G(s)**
Ideal PID-regulator	u(t) = $K(e(t)+\int_0^t e(\tau)d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt})$	G(s) = $K(1+\frac{1}{T_I s}+T_d s)$

POLPLACERINGSREGULATOR och POLPLACERINGSMETODEN



Val av ordningstal hos karakteristiskt polynom:
grad(P) = grad(A) + grad(B) -1 (icke-integrerande regulator)
grad(P) = grad(A) + grad(B) (integrerande regulator)

Val av ordningstal hos regulatorpolynom: (icke-integrerande regulator)
grad(C) = grad(B) -1
grad(D) = grad(A) -1

Val av ordningstal hos regulatorpolynom: (integrerande regulator)
grad(C) = grad(B)
grad(D) = grad(A)

Karakteristisk ekvation: $P(z) = A(z)C(z) + B(z)D(z)$
där $P(z)=(1-q_1z^{-1})\ (1-q_2z^{-1})\ (1-q_3z^{-1})$…….. q_1, q_2, q_3 är våra polplaceringar

Polplaceringsregulator:

polynomen
$C(z) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + c_3z^{-3} + \ldots\ldots$
$D(z) = d_0 + d_1z^{-1} + d_2z^{-2} + d_3z^{-3} + \ldots\ldots$

$C(z) = (1- z^{-1})(1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + c_3z^{-3} + \ldots\ldots)$ - vid integrerande regulator

Börvärdesfaktor, som ger korrekt statisk förstärkning

$K_r = \frac{C(1)}{H(1)} + D(1) = \frac{P(1)}{B(1)}$

Tabell för diskretisering av kontinuerliga processer
Förutsättning är att insignalen till vår process är styckvis konstant med ett samplingsintervall h.

Kontinuerlig process G(s)	Diskretiserad process H(z)
$\frac{K}{s}$	$\frac{Kh}{z-1} = \frac{Khz^{-1}}{1-z^{-1}}$
e^{-Ls}, L är dödtiden	z^{-n}, där n= L/h
$\frac{K}{1+Ts}$	$\frac{K(1-e^{-h/T})}{z-e^{-h/T}} = \frac{K(1-e^{-h/T})z^{-1}}{1-e^{-h/T}z^{-1}}$
$\frac{K}{s(1+Ts)}$	$KT\frac{(e^{-h/T}-1+h/T)z^{-1}+(1-e^{-h/T}(1+h/T))z^{-2}}{1-(1+e^{-h/T})z^{-1}+e^{-h/T}z^{-2}}$

Tidsdiskret PID-regulator:

Regulator	**Funktion**
Ideal PID-regulator	u[k]= $K(e[k]+\frac{h}{T_i}\sum_{i=0}^{k}e[i]+T_d\frac{e[k]-e[k-1]}{h})$

h = samplingsintervallet
K= förstärkningen
T_i = integrationstid
T_d = deriveringstid

Några viktiga Laplacetransformer

Laplacetransform - F(s)	**Tidsfunktion – f(t) för t >0**
1	Impulsfunktion – $\delta(t)$
1/s	Stegfunktion – $\theta(t)$
$1/s^2$	Rampfunktion – t
$1/s^3$	Parabel – $t^2/2$
$1/(s+a)$	e^{-at}
$1/(s(s+a))$	$1- e^{-at}$
$1/(s(sa+1)(sb+1))$	$1- ae^{-t/a}/(a-b) - be^{-t/b}/(b-a)$
e^{-Ls}/s	Fördröjd stegfunktion- $\theta(t-L)$
$sF(s)- f(0)$	$f'(t)$ – förstaderivatan av en funktion
$s^2F(s) – sf(0) - f'(0)$	$f''(t)$ – andraderivatan av en funktion
$s^3F(s) – s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$	$f^{(3)}(t)$ – tredjederivatan ---II---
$A\omega/(s^2 + \omega^2)$	$A\sin(\omega t)$
$As/(s^2 + \omega^2)$	$A\cos(\omega t)$
$aF_1(s) + bF_2(s)$	$af_1(t) + bf_2(t)$ - superposition
$F(s)/s$	$\int_0^t f(t)dt$

Några viktiga Z-transformer

Slutvärdessatsen: $f(\infty)=\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1} (z-1)F(z)$

Begynnelsevärdessatsen: $f(0)=\lim_{k\to 0} f(k) = \lim_{z\to\infty} F(z)$

Givetvis kan ingen av dessa satser användas villkorslöst utan det finns vissa förbehåll.

Tidsdiskret funktion - f(k)	**z-transform – F(z)**
enhetspuls	1
enhetssteg - u[k]	$1/(1-z^{-1})$
enhetsramp – k	$z^{-1}/(1-z^{-1})^2$
a^k	$1/(1-az^{-1})$
fördröjd enhetspuls (L sampel)	z^{-L}
fördröjt enhetssteg (L sampel) - u[k-L]	$z^{-L}/(1-z^{-1})$
$\sin(\omega k)$	$z^{-1}\sin\omega / (1- (2\cos\omega) z^{-1}+ z^{-2})$
$\cos(\omega k)$	$z^{-1}(1- z^{-1}\cos\omega) / (1- (2\cos\omega) z^{-1}+ z^{-2})$