Lösningar till tentamen i Introduktionskurs i Matematik, 5p

Distanskurs
1 november, 2008, kl. 9.00–13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844).

1. Bevisa att mängden $\mathbb{Q}$ är uppräknelig. (3p)

   Lösning: (Se Exempel 4.4.4, s. 48 ur *Diskret Matematik* av Bergström.) $\square$

2. Härled formeln för beräkning av en geometrisk summa. (3p)

   Lösning: (Se Sats 5, s. 57 ur *Analys i flera variabler* av Persson & Böiers.) $\square$

3. Betrakta polynomet $p(x) = 2x^4 - 13x^3 + 27x^2 - 13x - 15$.
   (a) Bevisa att $x - 2 + i \,|\, p(x)$. (3p)
   (b) Beräkna samtliga nollställen till $p(x)$. (3p)

   Lösning:

   (a) Om $x-2+i$ är ett nollställe så är $x-2-i$ det också och $(x-2+i)(x-2-i) = (x-2)^2 - i^2 = x^2 - 4x + 5$. Att $x^2 - 4x + 5$ delar $2x^4 - 13x^3 + 27x^2 - 13x + 15$ kan visas t.ex. genom polynomdivision (se föreläsningsanteckningarna) eller ett linjärt ekvationssystem: $(x^2 - 4x + 5)(2x^2 + Ax + B) = 2x^4 + (A-8)x^3 + (B - 4A + 10)x^2 + (5A - 4B)x + 5B = 2x^4 - 13x^3 + 27x^2 - 13x + 15 \;\Rightarrow\; A - 8 = -13 \;\Rightarrow\; A = -5$ och $5B = -15 \;\Rightarrow\; B = -3$. Detta bevisar att $x - 2 + i$ delar $p(x)$.

   (b) De två första nollställena är alltså $x_1 = 2 - i$ och $x_2 = 2 + i$. De andra två fås av att lösa $2x^2 - 5x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{5\pm 7}{4}$. Förutom $2 - i$ har alltså $p(x)$ nollställena $x_2 = 2 + i$, $x_3 = 3$ och $x_4 = -\frac{1}{2}$.

   $\square$

4. Bevisa att $123^n - 234 \equiv 345 \pmod 6$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (3p)

Lösning: $123^n - 234 - 345 = 123^n - 579 \equiv (123 - 6 \cdot 20)^n - (579 - 6 \cdot 96) = 3(3^{n-1} - 1)$. Eftersom 3 är udda så är 3^{n-1} udda varmed $3^{n-1} - 1$ är jämnt, dvs det finns ett heltal k sådant att $123^n - 234 - 345 \equiv 3(3^{n-1} - 1) = 3 \cdot 2k \equiv 0 \pmod 6$. □

5. Lös rekurrensekvationen $r_{n+2} - 2r_{n+1} + r_n = 2^n,\ r_0 = r_1 = 0$. (3p)

Lösning: Kar. ekv.: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \Rightarrow r_{hn} = A + Bn$.
För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $r_n = 2^n z_n$: $r_{n+2} - 2r_{n+1} + r_n = 2^2 \cdot 2^n z_{n+2} - 2 \cdot 2^1 \cdot 2^n z_{n+1} + 2^n z_n = 2^n \Rightarrow 4z_{n+2} - 4z_{n+1} + z_n = 1$. Denna satisfieras av $z_n = 1$. Därmed har vi partikulärlösningen $r_{pn} = 2^n$ varmed den totala lösningen blir $r_n = A + Bn + 2^n$. Instättning av begynnerlsevillkoren ger nu att $0 = r_0 = A + 1 \Rightarrow A = -1$ och $0 = r_1 = A + B + 2 \Rightarrow B = -1$. Alltså är den fullständiga lösningen $r_n = 2^n - n - 1$. □

6. Lös fullständigt ekvationen

$$\frac{1 + \sin^3 x}{1 + \sin x} = \cos^2 x \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: Eftersom $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ så är $1 + \sin^3 x = (1 + \sin x)(1 - \sin^2 x) = 1 - \sin^2 + \sin x - \sin^3 x \Rightarrow 2\sin^3 x + \sin^2 x - \sin x = 0$. Med substitutionen $y = \sin x$ har vi $y^3 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y = 0$ med den uppenbara roten $y_1 = 0$. Efter faktorisering av denna får vi ekvationen $y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ med lösningarna $y_2 = \frac{1}{2}$ och $y_3 = -1$. För variabeln x innebär detta:

$$\begin{aligned} \sin x = y_1 = 0 &\iff x = \pi n, n = \mathbb{Z} \\ \sin x = y_2 = \tfrac{1}{2} &\iff x = \tfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \tfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, n = \mathbb{Z} \\ \sin x = y_3 = -1 &\iff x = \tfrac{3\pi}{2} + 2\pi n, n = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Då $\sin x = -1$ är nämnaren i vänsterledet 0. Detta måste undersökas närmare. Eftersom även täljaren är 0 finns möjligheten att gränsvärdet existerar. Då vi vet att $y = -1$ är ett nollställe för $1 + y^3$ kan $y + 1$ faktoriseras ut. Vi har att $1 + y^3 = (y+1)(y^2 - y + 1)$ vilket innebär att $\lim_{y \to -1} \frac{1+y^3}{1+y} = \lim_{y \to -1}(y^2 - y + 1) = 3$. Emellertid är högerledet $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - y^2 \to 0$ då $y \to -1$, vilket innebär att ekvationen *inte* satisfieras av $\sin x = -1$.
(Man kan resonera på samma sätt genom att direkt göra substitionen $y = \sin x$, förenkla vänsterledet $\frac{1+y^3}{1+y} = \frac{(1+y)(1-y+y^2)}{1+y} = 1 - y + y^2$ och lösa *andragradaren* $1 - y + y^2 = 1 - y^2 \Rightarrow y_1 = 0,\ y_2 = \frac{1}{2}$.)
Därmed är lösningsmängden $\{\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$. □

7. Axel ser att ett tåg som passerar är exakt lika långt som den tunnel det kör genom: 1 km (inklusive loket). Tåget har både passagerarvagnar, 49,2 m långa, och godsvagnar, 39,6 m långa, och loket är 44,8 m. Hur många vagnar har tåget? (3p)

   Lösning: Låt x vara antalet passagerarvagnar och y antalet godsvagnar. Då är $49.2x + 39.6y = 1000 - 44.8$, dvs $492x + 396y = 9552$. Enligt Euklides algoritm är $\mathrm{SGD}(492, 396) = 12$ varmed man kollar och finner att 9552 är delbart med 12: $\frac{9662}{12} = 796$. Därmed kan den diofantiska ekvationen förenklas till $41x + 33y = 796$. Euklides baklänges ger partikulärlösningen $(x, y) = (-4, 5)$ till hjälpekvationen $41x + 33y = 1$. Muliplikation med 796 ger partikulärlösning till den fullständiga ekvationen: $(x, y) = (-3184, 3980)$, varmed slutligen den fullständiga lösningen är $\{(x, y) = (-3184 + 33k, 3980 - 41k) : k \in \mathbb{Z}\}$. Det visar sig att enda lösningen sådan att både x och y är positiva är $(x, y) = (17, 3)$ (med $k = 97$, ty då $k \leq 96$ är $x \leq -16$ och då $k \geq 98$ är $y \leq -38$). Alltså är det totala antalet vagnar $17 + 3 = 20$. $\square$

8. Negera utsagan $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$. (3p)

   Lösning: Eftersom $\neg(\forall x : P(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$, $\neg(\exists x : P(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x)$ och $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ så är

   $\neg(\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon))$

   $\Leftrightarrow$

   $\exists\, \epsilon > 0\ \forall\, \delta > 0 : (|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \epsilon)$. $\square$

9. Antag att f och g är udda funktioner med definitionsmängder $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$. Bevisa att $f \circ g$ är en udda funktion. (3p)

   Lösning: f udda: $f(-x) = -f(x)$ och g udda: $g(-x) = -g(x)$. Därmed har vi att $f \circ g\,(-x) = f(g(-x)) \overset{*}{=} f(-g(x)) \overset{**}{=} -f(g(x)) = -f \circ g\,(x)$, där likheten $*$ beror på att f är udda och likheten $**$ beror på att g är udda. Alltså är $f \circ g$ udda. $\square$