Lösningar till Tentamen i Introduktionskurs i Matematik, 5p

Distanskurs
26 oktober, 2007, kl. 14.00–18.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844).

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna skall vara *utförligt* redovisade!
Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad.
Lösningar kommer finnas på internet: `http://www.hh.se/staff/erja` → `Teaching` → `Matematik 1-30, Distanskurs` → `Delkurs 1: Introduktionskurs i matematik`

1. Bevisa att mängden av de rationella talen är uppräknelig. (3p)

Lösning: För att bevisa detta kan man ange en regel för hur de rationella talen (dvs alla tal som kan skrivas som bråk) kan räknas upp: $\{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$. De tal som kan skrivas som bråk har formen p/q där p och q är heltal. Därmed kan vi skriva upp alla rationella tal i en tabell på följande sätt

q \ p	0	1	−1	2	−2	3	−3	…
1	0	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$-\frac{3}{1}$	…
2		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$-\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	…
3		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$-\frac{3}{3}$	…
4		$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	…

Om vi går från 0 rakt fram till $\frac{1}{1}$, vidare rakt fram till $-\frac{1}{1}$ och sedan *snett neråt vänster* till $\frac{1}{2}$, rakt nedåt till $\frac{1}{3}$, sedan *snett uppåt höger* till $-\frac{1}{2}$, vidare snett uppåt höger till $\frac{2}{1}$, rakt fram till $-\frac{2}{1}$, *snett nedåt vänster* till $\frac{2}{2}$, osv. och döper q_i genom att gå *diagonalt* genom talen i tabellen på detta vis så får vi:
$q_1 = 0$, $q_2 = \frac{1}{1}$, $q_3 = -\frac{1}{1}$, $q_4 = \frac{1}{2}$, $q_5 = \frac{1}{3}$, $q_6 = -\frac{1}{2}$, $q_7 = \frac{2}{1}$, $q_8 = -\frac{2}{1}$, $q_9 = \frac{2}{2}$, $q_{10} = -\frac{1}{3}$, $q_{11} = \frac{1}{4}$, …
På detta vis kan vi räkna upp alla tal i $\mathbb{Q}$. Visserligen får vi ibland samma tal flera gånger (t.ex. är ju $q_2 = q_9 = 1$) men det gör ju inget – det viktiga är ju bara att man inte *missar* några tal. $\square$

2. Formulera och bevisa formeln för beräkning av en geometrisk summa. (3p)

Lösning: En geometrisk summa är en summa på formen $\sum_{k=0}^{n} a^k$ och formeln för beräkning av denna är $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ och gäller för alla $a \neq 1$. Detta bevisas som följer: låt $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$. Vi ska visa att $S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. Kart att $S_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} + a^n$ varmed $a \cdot S_n = a(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} + a^n) = a + a^2 + a^3 \ldots + a^n + a^{n+1} = (1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} + a^n) - 1 + a^{n+1} = S_n - 1 + a^{n+1}$

$\Rightarrow\ 1 - a^{n+1} = S_n - a \cdot S_n = (1-a)S_n$. Eftersom $a \neq 1$ kan vi dividera båda led med $1 - a$ varmed slutligen $\frac{1-a^{n+1}}{1-a} = S_n$ vilket skulle bevisas. $\square$

3. Är $\Big(\neg(P \vee \neg P)\Big) \Rightarrow \Big(Q \wedge (P \Leftrightarrow Q)\Big)$ en tautologi, kontradiktion eller ingetdera? (3p)

Lösning: Om $P = \mathsf{F}$ så är $P \vee \neg P \Leftrightarrow \mathsf{F} \vee \mathsf{S} \Leftrightarrow \mathsf{S}$ och om $P = \mathsf{S}$ så är $P \vee \neg P \Leftrightarrow \mathsf{S} \vee \mathsf{F} \Leftrightarrow \mathsf{S}$. M.a.o. är $P \vee \neg P$ en tautologi. Därmed är $\neg(P \vee \neg P)$ en kontradiktion och eftersom $A \Rightarrow B$ är sant när $A = \mathsf{F}$ oavsett vad B är, så är $(\neg(P \vee \neg P)) \Rightarrow (Q \wedge (P \Leftrightarrow Q))$ en tautologi. $\square$

4. Vad är resten av $24 \cdot 46^{68}$ vid heltalsdivision med 9? (3p)

Lösning: $24 \cdot 46^{68} \equiv (24 - 2 \cdot 9) \cdot (46 - 5 \cdot 9)^{68} = 6 \cdot 1^{68} = 6$. $\square$

5. Lös kongruensekvationen $x^7 + x \equiv 3x^2 \pmod{5}$. (3p)

Lösning: Räcker med att kolla $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ eftersom vi räknar mod 5. Vi får

x	$x^7 + x - 3x^2$
-2	$-128 - 2 - 12 = -142 \equiv 3$
-1	$-1 - 1 - 3 = -5 \equiv 0$
0	0
1	$1 + 1 - 3 = -1 \equiv 4$
2	$128 + 2 - 12 = 118 \equiv 3$

Därmed är lösningsmängden $\{5k,\ 5k-1 : k \in \mathbb{Z}\}$. $\square$

6. Då Pelle ska köpa godis väljer han mellan geléhallon för 1:-/st, nappar för 3:50/st och lakritspipor för 4:50:-/st. Han vill ha lika många lakritspipor som geléhallon och nappar tillsammans. På hur många sätt kan han köpa för alla sina 300:-? (3p)

Lösning: Om vi räknar i tioöringar och låter x vara antalet geléhallon, y antalet nappar och z antalet lakritspipor så har vi att $10x + 35y + 45z = 3000$ och efter division med 5 att $2x + 7y + 9z = 600$. Dessutom ska $x + y = z$ varmed ekvationen blir $2x + 7y + 9(x + y) = 11x + 16y = 600$. Euklides algoritm ger att

$$\begin{aligned} 16 &= 1 \cdot 11 + 5 \\ 11 &= 2 \cdot 5 + 1 \end{aligned}$$

varmed $\mathrm{SGD}(11, 16) = 1$ (vilket vi kanske i.o.f.s. redan visste) varmed hjälpekvationen är $11x+16y=1$. Eklides baklänges ger oss nu att $1=11-2\cdot 5=11-2(16-11)=3\cdot 11-2\cdot 16$ varmed $(3,-2)$ är en lösning till hjälpekvationen så $600(3,-2)=(1800,-1200)$ är en lösning till den fullständiga. Allmän lösning är därmed $(1800+16m,-1200-11m):m\in\mathbb{Z}\}=\{(8+16m,32-11m):m\in\mathbb{Z}\}$ och de positiva lösningarna är:

$(8,32)$ $\Rightarrow z=40$	$(24,21)$ $\Rightarrow z=45$	$(40,10)$ $\Rightarrow z=50$

(Jag slår vad om att Pelle fick ont i magen efteråt!) $\square$

7. Lös rekurrensekvationen $3r_{n+2}-5r_{n+1}-2r_n=4n^2-2n+1$ för $n=0,1,2,\ldots$ där $r_0=1$ och $r_1=0$. (4p)

Lösning: Kar. ekv.: $3x^2-5x-2=0 \;\Rightarrow\; x^2-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=0 \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; \frac{5}{6}\pm\sqrt{\frac{23}{36}+\frac{2}{3}}=\frac{5\pm 7}{6}=\left\{\begin{array}{c}2\\-\frac{1}{3}\end{array}\right. \;\Rightarrow\; r_{hn}=C_1 2^n+C_2(-\frac{1}{3})^n.$

Partikulärlösning: Ansätter $r_{pn}=an^2+bn+c$ vilket ger vänsterledet $3(a(n+2)^2+b(n+2)+c)-5(a(n+1)^2+b(n+1)+c)-2(an^2+bn+c)=-4an^2+(2a-2b)n+(7a+b-4c)$ vilket identifieras med koefficienterna framför $n^2,n,1$ i högerledet och detta ger:
$-4a=4 \;\Rightarrow\; a=-1$
$2a-2b=-2 \;\Rightarrow\; -1-b=-1 \;\Rightarrow\; b=0$
$2a+b-4c=1 \;\Rightarrow\; -7-4c=1 \;\Rightarrow\; c=-2$
varmed en partikulärlösning är $r_{pn}=-n^2-2$.
Med begynnelsevillkoren kan slutligen konstanterna C_1 och C_2 bestämmas:
$(1):\; 1=r_0=C_1+C_2-2$
$(2):\; 0=r_1=2C_1-\frac{1}{3}C_2-3$
$2(1)-(2):\; 2=(2-2)C_1+(2+\frac{1}{3})C_2+(-4+3)=\frac{7}{3}C_2-1 \;\Rightarrow\; C_2=\frac{9}{7}$
$\overset{(1)}{\Rightarrow}\; C_1=3-\frac{9}{7}=\frac{12}{7}$
$\Rightarrow\; r_n=\frac{12}{7}2^n+\frac{9}{7}(-\frac{1}{3})^n-n^2-2.$ $\square$

8. Lös ekvationen $(1+2\sin x)\cos^2 x-\sin x=1$. (4p)

Lösning: Enligt "trigonometriska ettan" är $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ varmed
$(1+2\sin x)(1-\sin^2 x)-\sin x=1$. Låt nu $y=\sin x$ så är ekvationen
$(1+2y)(1-y^2)-y-1=0$
$y(1-y-2y^2)=0$
Därmed är $y_1=0$ en rot. Övriga rötter fås av att lösa
$y^2+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}=0$
$y=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}=\frac{-1\pm 3}{4}=\left\{\begin{array}{c}-1\\\frac{1}{2}\end{array}\right.$.
Alltså är $y_1=0, y_2=-1, y_3=\frac{1}{2}$.

Dessa rötter i y-variabeln motsvarar för x-variabeln:
$y = \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z},$
$y = \sin x = -1 \Leftarrow x = \frac{3\pi}{2},$
$y = \sin x = \frac{1}{2} \Leftarrow (x = \frac{\pi}{6}$ eller $\frac{5\pi}{6})$
(detta inses efter lite resonerande och ritande i enhetscirkeln).
Därmed är lösningsmängden $\{\pi k,\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$. $\square$

9. Visa att

$$(1+x)^n - (1-x)^n \;=\; 2 \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1}$$

där heltalsdelen av ett tal y är $[y] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq y\}$. (4p)

Lösning:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n - (1-x)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{(-x)^k}_{=(-1)^k x^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{(1-(-1)^k)}_{=\begin{cases} 2 \text{ om } k \text{ udda} \\ 0 \text{ om } k \text{ jämnt} \end{cases}} \\
&\quad \{\text{Substituera } k = 2j+1\} \\
&= 2 \sum_{j=0}^{N} \binom{n}{2j+1} x^{2j+1}
\end{aligned}$$

där $N = \begin{cases} n/2 - 1 & \text{om } n \text{ är jämnt} \\ (n-1)/2 & \text{om } n \text{ är udda} \end{cases}$ vilket innebär att $N = [\frac{n-1}{2}]$. $\square$