LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMEN I SIGNALER OCH SYSTEM 100111 för E2/D2/Mek2

---

1. DC-förstärkning $\approx$ 14 dB (5 ggr)

a) Hittar 2 st brytfrekvenser: $\begin{cases} \omega_{b1} = 0{,}1 \text{ rad/sek} \\ \omega_{b2} = 10 \text{ rad/sek} \end{cases}$

$$G(s) = \frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_{b1}}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_{b2}}+1\right)} = \frac{5}{\underbrace{(10s+1)}_{}\,\underbrace{(0{,}1s+1)}_{\text{tidskonstanter}}} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

b) $5\,x(t) = y''(t) + 10{,}1 \cdot y'(t) + y(t)$

c) $$|G(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{(10\omega)^2+1^2}\sqrt{(0{,}1\omega)^2+1^2}}$$

$$\arg\{G(j\omega)\} = -\arctan(10\omega) - \arctan(0{,}1\omega)$$

d) reella poler alltså måste stegsvaret komma ifrån A) eller C).
Oscillationer i stegsvaret härrör från komplexkonj. poler.

I vårt fall har vi 2 st tidskonstanter 10 resp 0,1 sek. Detta sammanfaller närmast perfekt med stegsvar A.

2.

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2+10^2}}{\sqrt{\omega^2+4}\,\sqrt{\omega^2+100^2}}$$

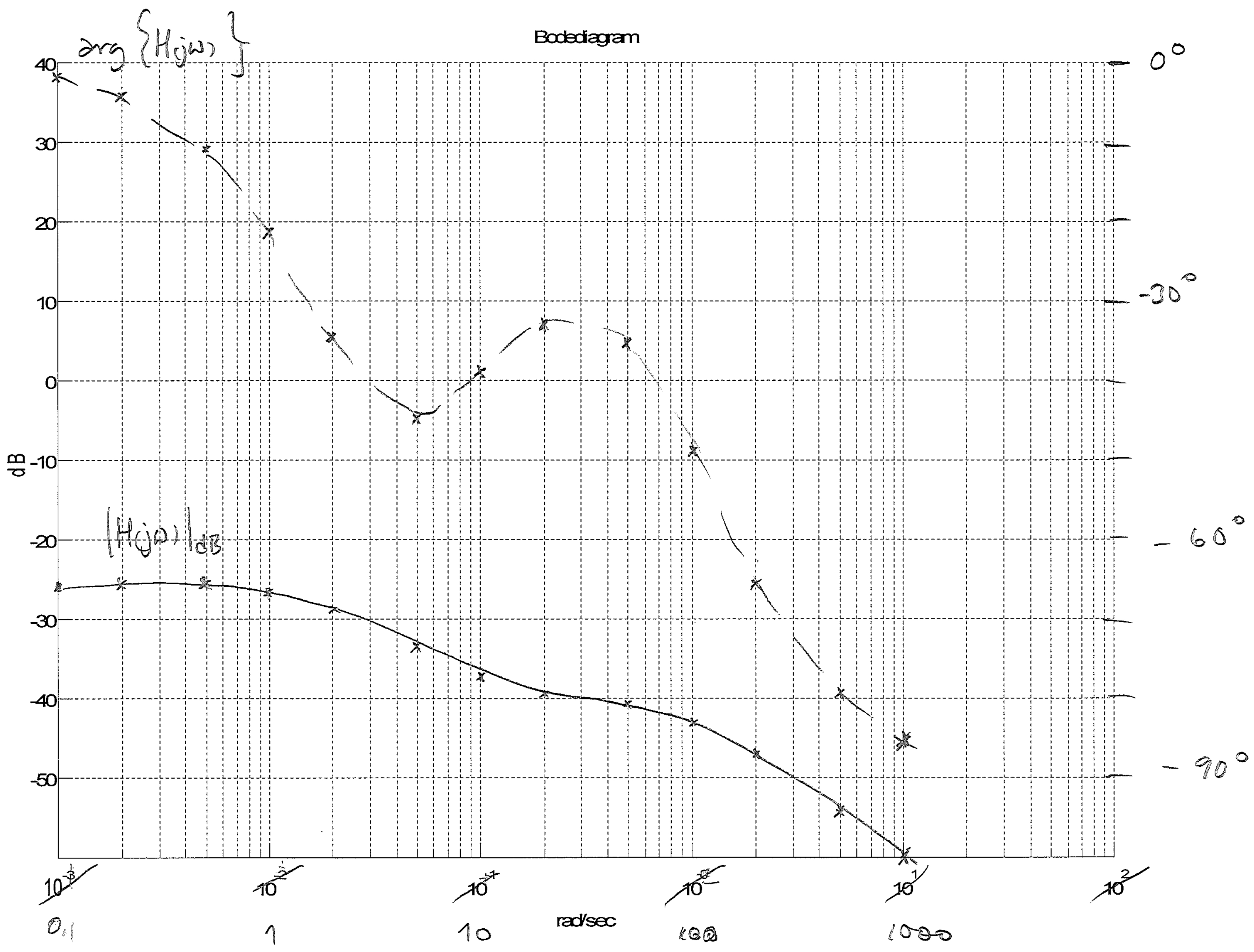
$$\arg\{H(j\omega)\} = \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{100}\right)$$

vi har 3 brytfrekvenser: 10, 2 resp 100

Undersök frekv. område 0.1 — 1000 rad/sek.

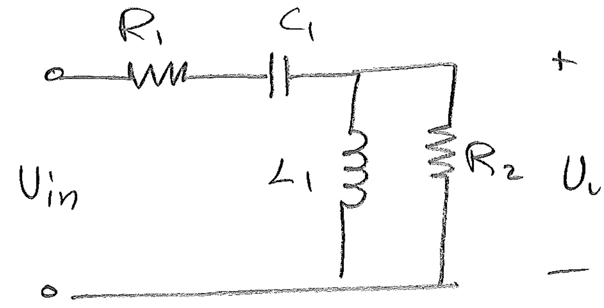
ω	$\arg\{H(j\omega)\}$	$\lvert H(j\omega)\rvert$	$\lvert H(j\omega)\rvert_{dB}$
0.1	$-2,3°$		-26
0.2	$-4.7°$		-26
0.5	$-11.5°$		-26.3
1	$-21.4°$		-26.9
2	$-34.8°$		-28.9
5	$-44.5°$		-33.7
10	$-39.4°$		-37.2
20	$-32.2°$		-39.2
50	$-35.6°$		-40.8
100	$-49.6°$		-43
200	$-65.7°$		-47
500	$-79.6°$		-54.1
1000	$-84.7°$		-60

2 Point


Bodediagram
arg{H(jω)}
|H(jω)|dB
dB
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
0°
-30°
-60°
-90°
rad/sec
0,1
1
10
100
1000
10^{2}

3.

a)



$$U_{ut} = U_{in} \cdot \frac{j\omega L_1 // R_2}{j\omega L_1 // R_2 + R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} =$$

$$= U_{in} \frac{\frac{j\omega L_1 \cdot R_2}{j\omega L_1 + R_2}}{\frac{j\omega L_1 \cdot R_2}{j\omega L_1 + R_2} + R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{U_{in} \cdot j\omega L_1 \cdot R_2}{j\omega L_1 R_2 + \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)(j\omega L_1 + R_2)} =$$

$$= \frac{U_{in} \cdot j\omega L_1 \cdot R_2 \cdot j\omega C_1}{j\omega C_1 \cdot j\omega L_1 R_2 + (j\omega C_1 R_1 + 1)(j\omega L_1 + R_2)} = \frac{-U_{in} \cdot \omega^2 L_1 C_1 \cdot R_2}{-\omega^2 L_1 C_1 R_2 + (R_2 - \omega^2 L_1 C_1 R_1) + j\omega(L_1 + C_1 R_1 R_2)}$$

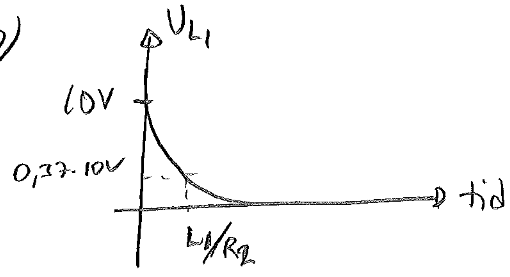
Frekvensfunktion:

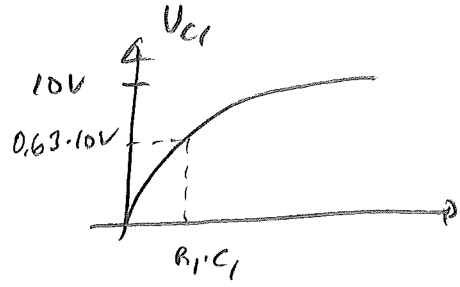
$$\frac{U_{ut}}{U_{in}} = \frac{-\omega^2 L_1 C_1 R_2}{j\omega(L_1 + C_1 R_1 R_2) + (R_2 - \omega^2 L_1 C_1 R_1 - \omega^2 L_1 C_1 R_2)}$$

överföringsfunktion

$$H(s) = \frac{s^2}{2 \cdot s^2 + 10^8 s + 10^{14}}$$

b)





när tiden → ∞ så betyder att L_1 är kortsluten dvs $U_{L_1} = U_{R_2} = 0$

Ström flyter tills kondensator är fulladdad och den laddas till 10V, dvs $U_{R_1} = 0$.

3 forts

c) $$H(s) = \frac{s^2 \cdot L_1 \cdot C_1 R_2}{s^2 \cdot L_1 \cdot C_1 (R_1 + R_2) + s(L_1 + C_1 R_1 R_2) + R_2}$$

$$s^2 \cdot 10^{-14} (2k) + s \cdot (10^{-5} + 10^{-3}) + 10^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4{,}9 \cdot 10^7 \\ 1 \cdot 10^{-6} \end{cases}$$

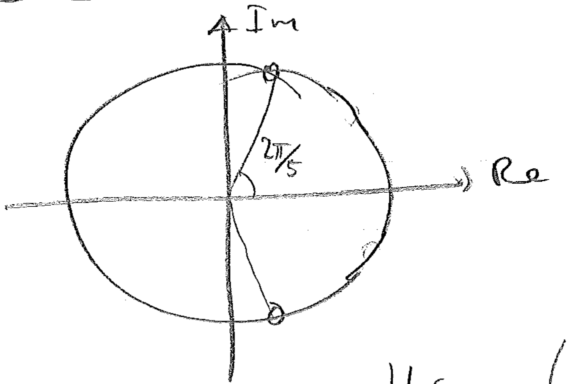
stabilt system
båda ligger i VHP.

d) $\omega \to 0$: $H(0) = 0$

$\omega \to \infty$: $H(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

" HP-filter 2:a ordningen "

4.



- Eliminera 200 Hz $\quad \Omega_0 = \frac{200}{1000} \cdot 2\pi$
- förstärk DC 10 ggr

$f_s = 1000$ Hz $\quad (= 2\pi)$

nollställen som eliminerar 200 Hz.

$$H(z) = \frac{(z - e^{j\frac{2\pi}{5}})(z - e^{-j2\pi/5})}{z^2} K$$

$z^2 \longleftarrow$ kausalt

$$H(1) = \underbrace{(1 - e^{j2\pi/5})(1 - e^{-j2\pi/5})}_{1} K = (1 - e^{j2\pi/5} - e^{-j2\pi/5} + 1) \cdot K$$

$$= \left(2 - \left(\cos\frac{2\pi}{5} + \cancel{j\sin\frac{2\pi}{5}}\right) - \left(\cos\frac{2\pi}{5} - \cancel{j\sin\frac{2\pi}{5}}\right)\right) K =$$

$$= \left(2 - 2 \cdot \cos\frac{2\pi}{5}\right) \cdot K = 10 \Rightarrow K = \frac{10}{\left(2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}\right)} \simeq 7{,}236$$

$$H(z) = \frac{(z - e^{j\frac{2\pi}{5}})(z - e^{-j2\pi/5}) \cdot 7{,}236}{z^2}$$

4 forts.

$$H(z) = 7{,}236 \cdot \frac{\left(z^2 - z\left(e^{j2\pi/5} + e^{-j2\pi/5}\right) + 1\right)}{z^2} =$$

$$= \frac{7{,}223\left(z^2 - 0{,}618 \cdot z + 1\right)}{z^2} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\left(7{,}223 \cdot z^2 - 4{,}464 \cdot z + 7{,}223\right) X(z) = z^2 \cdot Y(z)$$

Multiplicera båda sidor med z^{-2}!
och därefter inverstransformera.

$$7.223\, x[k] - 4{,}472\, x[k-1] + 7{,}223 \cdot x[k-2] = y[k]$$

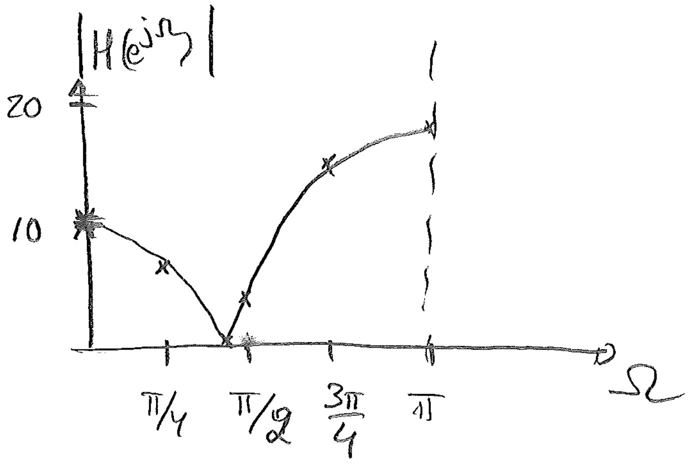
Ta fram motsvarande DTFT genom att sätta $z = e^{j\Omega}$ där Ω är normaliserad vinkelfrekv.

$$H(e^{j\Omega}) = 7{,}223 \cdot \frac{\left(e^{j2\Omega} - 0{,}618\, e^{j\Omega} + 1\right)}{e^{j2\Omega}} \Rightarrow$$

$$H(e^{j\Omega}) = 7{,}223 \frac{\left(\cos 2\Omega + j\sin 2\Omega - 0{,}618(\cos\Omega + j\sin\Omega) + 1\right)}{e^{j2\Omega}}$$

$$|H(e^{j\Omega})| = 7{,}223 \cdot \sqrt{(1 + \cos 2\Omega - 0{,}618\cos\Omega)^2 + (\sin 2\Omega - 0{,}618 \cdot \sin\Omega)^2}$$

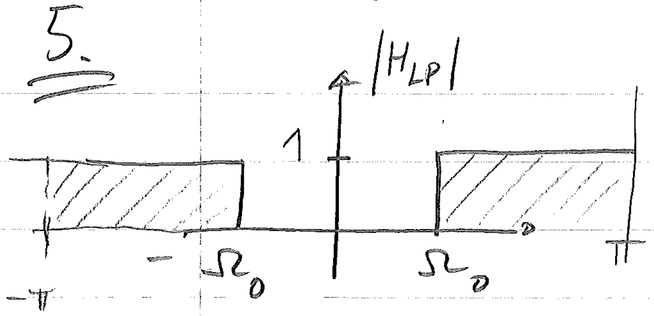
Ω	$\lvert H(e^{j\Omega})\rvert$	$\lvert H\rvert_{dB}$
0	10	20
$\pi/4$	5,76	15,2
$2\pi/5$	0.02	−34
$\pi/2$	4,47	13
$3\pi/4$	14,7	23,3
π	18,9	25,5



5. Ideallt HP-filter

$f_g = 1500$ Hz

$f_s = 4000$ Hz



$\Omega_0 = \frac{3}{4}\pi$

Approximera med ett FIR och fönster, Hanning.

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{3\pi/4}^{\pi} 1 \cdot e^{j\Omega n} \cdot d\Omega + \int_{-\pi}^{-\frac{3}{4}\pi} 1 \cdot e^{j\Omega n} \cdot d\Omega\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{e^{j\Omega n}}{jn}\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} + \left[\frac{e^{j\Omega n}}{jn}\right]_{-\pi}^{-\frac{3\pi}{4}}\right\} = \ldots = \frac{1}{\pi n}\left(\sin(\pi n) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)\right)$$

trunkerat ideallt impulssvar: $h(0) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)}{\left(\frac{3}{4}\pi n\right)} = \frac{1}{4}$

$h[-1] = h[1] = -0,2251$

$h[-2] = h[2] = 0,1592$

$h[-3] = h[3] = -0.075$

skifta impulssvaret så att det blir kausalt:

$h(0) = -0.075$, $h[1] = 0.1592$, $h[3] = -0.2251$, $h[4] = \frac{1}{4}$, $h[5] = -0.2251$

$h[6] = 0,1592$, $h[7] = -0,075$

Tag fram ett Hanning fönster

$W[0] = 0 = W[6]$

$W[1] = 0,25 = W[5]$

$W(2) = 0,75 = W[4]$

$W(3) = 1$

Multiplicera nu fönsterfunktionen med vårt trunkerade ideala & kausala impulssvar.

$h_{HP}'[n] = W[n] \cdot h[n]$

$h_{HP}(0) = h_{HP}(6) = 0$

$h_{HP}[1] = h_{HP}[5] = 0,0398$

$h_{HP}[2] = h_{HP}[4] = -0,1688$

$h_{HP}[3] = 0,25$

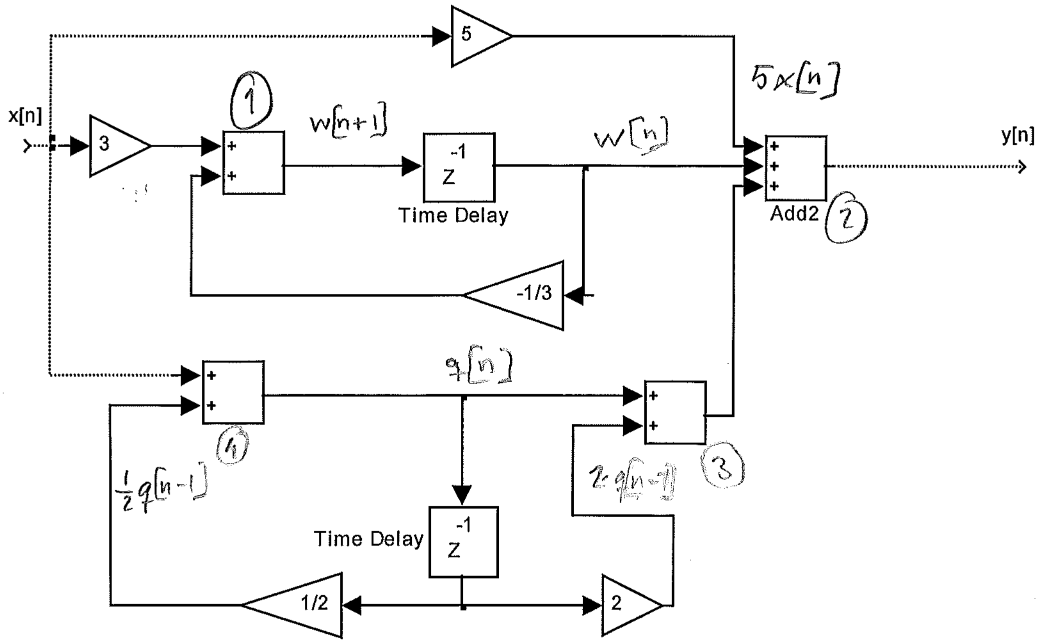
$$y[n] = 0,0398\,x[n-1] - 0,1688 \cdot x(n-2) + 0,25 \cdot x(n-3) - 0,1688 \cdot x(n-4) + 0,0398 \cdot x[n-5]$$

$$H_{HP}[z] = 0.0398 \cdot z^{-1} - 0,1688\,z^{-2} + 0,25 \cdot z^{-3} - 0,1688 \cdot z^{-4} + 0.0398\,z^{-5}$$

6.

Inför hjälpvariabler $w[n]$ & $q[n]$

a)



Tag fram ekvationer vid 1: $3x[n] - \frac{1}{3}w[n] = w[n+1]$ (1)

vid 2: $y[n] = 5x[n] + w[n] + q[n] + 2q[n-1]$ (2)

vid 4: $q[n] = x[n] + \frac{1}{2}q[n-1]$ (3)

Transformera ekvationerna och substituera bort hjälpvariabler.

$$3X(z) = W(z)\left(\frac{1}{3} + z\right) \quad (1)$$

$$Y(z) = 5\cdot X(z) + W(z) + Q(z)(1 + 2z^{-1}) \quad (2)$$

$$Q(z) = X(z) + \frac{1}{2}Q(z)\cdot z^{-1} \quad (3)$$

Lös ut $W(z)$ ur (1) och insättning i (2) ger:

$$Y(z) = 5\cdot X(z) + \frac{3X(z)}{\frac{1}{3} + z} + Q(z)(1 + 2z^{-1}) \quad (4)$$

Därefter lös ut $Q(z)$ ur (3) och sätt in i (4).

$$Y(z) = 5X(z) + \frac{3X(z)}{\frac{1}{3} + z} + \frac{X(z)\cdot(1 + 2z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \quad (5)$$

Snygga till uttrycket!

6 forts:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{5\cdot\left(\frac{1}{3}+z\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right) + 3\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right) + \left(1+2z^{-1}\right)\left(\frac{1}{3}+z\right)}{\left(\frac{1}{3}+z\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

IIR-filter poler: $\begin{cases} z=-\frac{1}{3} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$

Från (5) fås impulssvar

$$h[n] = 5\cdot\delta[n] + 3\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n\cdot\delta[n-1] + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\cdot\delta[n] + 2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\cdot\delta[n-1]$$

c) kolla beteendet vid höga och låga frekv.

$z\to -1$ (höga), $z\to 1$ (låga)

$$H(1) = \frac{5\cdot\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(1-\frac{1}{2}\right) + 3\cdot\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 13{,}25$$

$$H(-1) = -0{,}1667 \Rightarrow \text{LP-filter}$$

d) Fördelar med ett FIR-filter:

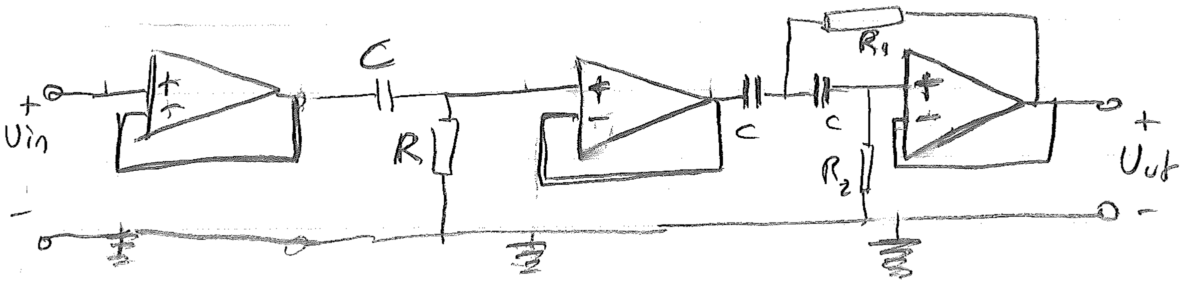
- alltid stabilt
- efterliknar ~~det~~ ideala filtret bäst.
  (kan fås med linjär fas i passband)

7. Aktivt analogt Chebyshev HP-filter, rippel 1,25 dB

$\omega_g = 20000$ rad, Dämpning 40 dB vid $\omega = 6000$ rad/sek

$$\frac{\omega_g}{\omega} = \frac{20}{6} = 3{,}33$$

Avläsning ur dämpn.kurva ger: 3:e grad är ett gränsfall som ger en siden förstärkning.



sätt C till ett standardvärde som 10 nF

Ur F.S. sid 11 fås:

$$\begin{cases} n = 3 \\ \omega_{in} = 2{,}370, & Q = - \\ \omega_{in} = 1{,}099, & Q = 2{,}157 \end{cases}$$

Länk 1:

$$R = \frac{1}{\omega_{in} \cdot \omega_g \cdot C} \simeq 2110\ \Omega$$

Länk 2:

$$R_1 = \frac{1}{2Q \cdot \omega_{in} \cdot \omega_g \cdot C} = 1055\ \Omega$$

$$R_2 = 4Q^2 \cdot R_1 = 19630\ \Omega$$