Lösningar till Tentamen i Envariabelanalys, 7.5p

Distanskurs
16 augusti, 2008 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844)

1. Bevisa att om $a < x_0 < b$, $f'(x_0) = 0$, f är kontinuerlig på (a, b) och $f''(x) > 0$ för alla $x \in (a, b)$, så är x_0 ett strängt lokalt minimum för f. (3p)

   Lösning: (Se Sats 2, s. 221 i *Analys i en variabel* av Persson och Böiers.) $\square$

2. Beräkna gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$. (4p)

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_n^{2n} \frac{dx}{x+1}$. (3p)

   Lösning:

   (a) Förläng med konjugetet till täljaren:
   $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x}(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-1})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x+1)-(x-1)}{\sqrt{x}\sqrt{x}\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} =$
   $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}})} = \frac{1+0}{\sqrt{2+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{2n} \frac{dx}{x+1} = \lim\limits_{n\to\infty} [\ln(x+1)]_n^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\ln(2n+1) - \ln(n+1)) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\frac{2n+1}{n+1} =$
   $= \lim\limits_{n\to\infty} \ln(2 - \frac{1}{n+1}) = \ln 2$.

   $\square$

3. Beräkna integralerna

   (a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$. (3p)

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$. (3p)

Lösning:

(a) $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx \left\{ \begin{array}{lll} u=x^2 & & x=0 \Leftrightarrow u=0 \\ du=2x\,dx & x\,dx=\frac{1}{2}\,du & x=1 \Leftrightarrow u=1 \end{array} \right\} = \int_0^1 e^u \frac{1}{2}\,du \;=\; \frac{1}{2}(e-1).$

(b) $\int \frac{dx}{4+x^2} \;=\; \int \frac{dx}{4(1+(\frac{x}{2})^2)} \left\{ \begin{array}{l} u=\frac{x}{2} \\ du=\frac{1}{2}\,dx \end{array} \right\} \;=\; \int \frac{2\,du}{2(1+u^2)} \;=\; \frac{1}{2}\arctan u \;+\; C \;=$

$= \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C \;\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}[\arctan\frac{x}{2}]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{2}.$

□

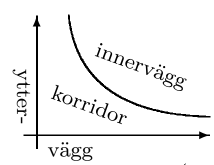
4. Beräkna längden av kurvan $y(x)=x^{3/2}$ mellan $x=0$ och $x=1$. (3p)

Lösning: Längden av kurvan $y(x)$ mellan $x=a$ och $x=b$ är $\int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$. I detta fall är $y'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} \;\Rightarrow\; (y'(x))^2 = \frac{9}{4}x$ varmed längden av kurvan är

$\int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx \quad \left\{ \begin{array}{lll} u=\sqrt{1+9x/4} & & x=0 \Leftrightarrow u=1 \\ du=\frac{9/4}{2\sqrt{1+9x/4}}\,dx & dx=\frac{8}{9}u\,du & x=1 \Leftrightarrow u=\sqrt{13}/2 \end{array} \right\} =$

$= \int_1^{\sqrt{13}/2} u\frac{8}{9}u\,du = \frac{8}{9}[\frac{u^3}{3}]_1^{\sqrt{13}/2} = \frac{8}{27}((\frac{\sqrt{13}}{2})^3-1) = \frac{8}{27}\cdot\frac{13^{3/2}-8}{8} = \frac{13^{3/2}-8}{27}.$ □

5. Man ska beställa en whiteboard. Den måste dock bäras genom en korridor som svänger 90° i ett hörn där innerväggen har formen av kurvan $f(x)=x^{-2}$ (se figur). Hur lång kan tavlan maximalt vara? (4p)



Lösning: $f'(x)=-2/x^3 \;\Rightarrow$ Linjen som beskriver tavlan mellan axlarna är $\ell(x) = -\frac{2}{x_0^3}x + a$ där x_0 är x-koordinaten för den punkt där linjen tangerar kurvan $f(x)$. Konstanten a ska väljas så att linjen blir just en tangent till kurvan, dvs så att $f(x_0)=\ell(x_0)$: $-\frac{2}{x_0^3}x_0 + a = \frac{1}{x_0^2} \;\Rightarrow\; a = \frac{3}{x_0^2}$. Längden av tavlan blir då avståndet mellan de punkter linjen skär x-axeln respektive y-axeln. Den skär y-axeln i $(0,\frac{3}{x_0^2})$ och den skär x-axeln i den punkt där $\ell(x)=0$: $\frac{2x}{x_0^3} = \frac{3}{x_0^2} \;\Rightarrow\; x = \frac{3}{2}x_0$, dvs i punkten $(\frac{3}{2}x_0, 0)$. Låt Q vara kvadraten av avståndet mellan punkterna, dvs $Q(x) = (\frac{3}{x^2})^2 + (\frac{3}{2}x)^2 \;=\; 9(x^{-4}+\frac{1}{4}x^2) \;\Rightarrow\; Q' \;=\; \frac{9}{2}(x-8x^{-5})$. Ekvationen $Q'=0$ ger extrempunkterna: $x^6 = 8 = 2^3 \;\Leftarrow\; x^2=2 \;\Leftrightarrow\; x=\pm\sqrt{2}$ (vilket är de enda reella lösningarna, och $x=+\sqrt{2}$ är den enda aktuella i det här fallet). Teckenstudium:

x	1	$\sqrt{2}$	2
Q'	$-$	0	$+$
Q	$\searrow$	min	$\nearrow$

. Så den *maximala* längden av tavlan är den *minimala* längden av linjen: $\sqrt{Q(\sqrt{2})} = \sqrt{9((\sqrt{2})^{-4}+\frac{1}{4}(\sqrt{2})^2)} = 3\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{2}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{11}.$ □

6. Lös fullständigt begynnelsevärdesproblemet $y'+y\cos x=\cos x\sin x$, $y(\frac{\pi}{2})=e$. (3p)

Lösning: Detta är en linjär differentialekvation av första ordningen. Eftersom $\int\cos x\,dx=\sin x+C$ så kan vi använda integrerande faktor $e^{\sin x}$:
$y'e^{\sin x}+y\cos x\,e^{\sin x}=\cos x\sin x\,e^{\sin x}$ varmed integrering av båda led ger $ye^{\sin x}=\int\cos x\sin x\,e^{\sin x}dx\left\{\begin{array}{c}u=\sin x\\ du=\cos x\,dx\end{array}\right\}=\int ue^u du\overset{P.I.}{=}ue^u-\int 1\cdot e^u du=ue^u-e^u+C=(\sin x-1)e^{\sin x}+C\ \Rightarrow\ y=\sin x-1+Ce^{-\sin x}$. Begynnelsevillkoret ger slutligen $e=y(\frac{\pi}{2})=1-1+Ce^{-1}\ \Rightarrow\ C=e^2\ \Rightarrow\ y(x)=\sin x-1+e^{2-\sin x}$. (Obs! Glöm inte bort möjligheten att kontrollera resultatet genom att beräkna y' och verifiera att $y'+y\cos x$ verkligen resulterar i $\cos x\sin x$.) $\square$

7. Lös differentialekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} y'' & - & y'\sin^2 x & + & 2y\cos x & = & \cos^2 x\\ y''\tan x & - & \frac{1}{2}y'\sin(2x) & - & 2y\sin x & = & \tan x\sin^2 x\\ \multicolumn{7}{c}{y(0)\ =\ 0 \qquad y(1)\ =\ 1 \qquad y'(x)>-1}\end{array}\right. \qquad (4p)$$

Lösning: Ekvationssystemet är

$$\left\{\begin{array}{cccccccl} y'' & - & y'\sin^2 x & + & 2y\cos x & = & \cos^2 x & (1)\\ y''\frac{\sin x}{\cos x}x & - & y'\sin x\cos x & - & 2y\sin x & = & \frac{\sin x}{\cos x}\sin^2 x & (2)\end{array}\right.$$

Om vi multiplicerar båda led i den undre ekvationen med $\frac{\cos x}{\sin x}$ fås

$$y''-y'\cos^2 x-2y\cos x=\sin^2 x$$

och subtraherar vi detta från den övre får vi

$$(1)-\frac{\cos x}{\sin x}\cdot(2):\quad (1+1)y''-(\sin^2 x+\cos^2 x)y'+2(\cos x-\cos x)y=\cos^2 x+\sin^2 x$$

och om man låter $z=y'$ kan vi förenkla detta till

$$2z'-z\ =\ 1$$

vilket är en separabel första ordningens differentialekvation som inte har något med trigonometriska uttryck att göra! Vi får $\frac{dz}{dx}=\frac{1+z}{2}\ \Rightarrow\ \int\frac{2}{1+z}\,dz=\int dx$ där $V.L.=2\ln|1+z|$ och $H.L.=x+C$. Eftersom $z=y'>-1$ enligt villkor är vänsterledet $\ln|1+z|=\ln(1+z)$ varmed $\ln(1+z)=\frac{1}{2}x+C\ \Rightarrow\ z=e^{x/2+C}-1\ \Rightarrow\ y=\int(e^{x/2+C}-1)\,dx=2e^{x/2+C}-x+D$. Begynnelsevillkoren ger att $0=y(0)=2e^C+D$ och $1=y(1)=2e^{1/2+C}-1+D=2e^{1/2}e^C-1-2e^C=(e^{1/2}-1)2e^C-1$ varmed $2e^C=2/(e^{1/2}-1)\ \Rightarrow\ C=\ln(\frac{1}{e^{1/2}-1})$ så $D=-2e^C=-\frac{2}{e^{1/2}-1}$. Alltså är efter lite förenkling

$$y(x)\ =\ \frac{2(e^{x/2}-1)}{e^{1/2}-1}-x.$$

$\square$