© 2006 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

Kapitel 10: Vektoranalys i rummet

I detta avslutande kapitel utvidgas vektoranalys från två dimensioner till tre. På samma sätt som man i två dimensioner kan definiera kurvintegraler, kan vi i tre dimensioner definiera både kurvintegraler,

$$\int_\gamma \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_\alpha^\beta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\, dt$$

där $\boldsymbol{r}(t)$ är en parametrisering av γ för $\alpha \le t \le \beta$, och ytintegraler,

$$\iint_Y \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N}\, dS = \iint_D \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}(s,t)) \cdot \left(\tfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \tfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\right) ds\, dt$$

där $\boldsymbol{r}(s,t)$ är en parameterframställning av ytsegmentet Y för $(s,t) \in D$.

Kurvintegralen kan, som sagt, tolkas som det arbete $\boldsymbol{u}$ utför längs γ och ytintegralen har tolkningen av flödet per ytenhet av $\boldsymbol{u}$ genom ytsegmentet Y.

Exempel Den sfäriska ytan $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$ har konstant densitet, k. Beräkna tröghetsmomentet m.a.p. z-axeln.

Lösning: Tröghetsmoment handlade det om på s. 311–313 och på mitten av s. 312 nämns att tröghetsmomentet, J, av en yta, Y, med viss massbeläggning, ϱ, blir ytintegralen $\iint_Y \varrho\, a^2 dS$ där a är det vinkelräta avståndet till rotationsaxeln.

Låt oss genast göra substitution till polära koordinater,

$$\begin{cases} x = r_0 \sin\theta \cos\phi \\ y = r_0 \sin\theta \sin\phi \\ z = r_0 \cos\theta \end{cases}$$

där $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$ och r_0 är den *konstanta* radien. Således vill vi beräkna $J = \iint_Y \varrho\, a^2 dS$ där Y parametriseras med $D = \boldsymbol{r}(\theta,\phi) = (r_0 \sin\theta\cos\phi, r_0\sin\theta\sin\phi, r_0\cos\theta)$. Vidare har vi att $dS = |\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}| = r_0^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ och eftersom $a^2 = x^2 + y^2 =$ $= r_0^2 \sin^2\theta\cos^2\theta + r_0^2\sin^2\theta\sin^2\theta = r_0^2\sin^2\theta$ så är tröghetsmomentet $J = \iint_Y \varrho\, a^2 dS =$ $= \int_0^{2\pi}(\int_0^\pi r_0^2 k \cdot r_0^2 \sin^2\theta \cdot r_0^2 \sin\theta\, d\theta)\, d\phi = 2\pi \cdot k r_0^4 \cdot 2\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{8}{3}\pi k r_0^4$. □

Gauss sats

För kurvintegraler i planet hade vi Greens formel. För ytintegraler i rummet heter motsvarigheten *Gauss sats* eller *Divergenssatsen*. Om $\boldsymbol{u} = (u,v,w)$ så låter vi div $\boldsymbol{u}$ beteckna $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z})$.

Sats 1 (s. 368) *Gauss sats*
Om $\boldsymbol{u} = (P,Q,R)$ $\mathcal{C}^1$-fält definierat i öppet område $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$
K kompakt $\subset \Omega$
$\partial K = \bigcup_i \gamma_i$ där γ_i $\mathcal{C}^1$-kurvor med utåtriktad normal
så $$\iint_{\partial K} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N}\, dS = \iiint_K \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, dx\, dy\, dz$$

Exempel Låt S vara cylinderytan som begränsas av $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ och $z = 3$. Beräkna det utåtriktade flödet av $\boldsymbol{u} = (x^2 + y^2 + z^2)(x, y, z)$.

Lösning: Om $P = x(x^2+y^2+z^2)$, $Q = y(x^2+y^2+z^2)$ och $R = z(x^2+y^2+z^2)$ så är $\frac{\partial P}{\partial x} = 1\cdot(x^2+y^2+z^2)+x\cdot 2x = 3x^2+y^2+z^2$ och på samma sätt $\frac{\partial Q}{\partial y} = x^2+3y^2+z^2$ och $\frac{\partial R}{\partial z} = x^2+y^2+3z^2$ varmed $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 5(x^2+y^2+z^2)$. Därmed är enligt Gauss sats flödet av $\boldsymbol{u}$ genom S: $\iint_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N}\,dS = \iiint_T 5(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ där T är den kropp som begränsas av S. Genom att substituera x och y till planpolära koordinater är därmed $\iint_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N}\,dS = 5\int_0^{2\pi}(\int_0^2(\int_0^3(r^2+z^2)r\,dz)\,dr)\,d\theta = 5(2\pi - 0)\int_0^2[r^3 z + \frac{1}{3}rz^3]_{z=0}^3\,dr =$ $= 10\pi[\frac{3}{4}r^4 + \frac{9}{2}r^2]_0^2 = 300\pi$. □

Exempel Antag att $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$[1] $\equiv 0$ i det tredimensioella området K med begränsningsytan ∂K. Visa att $\iint_{\partial K} f\cdot(\operatorname{grad} f)\cdot\boldsymbol{N}\,dS = \iiint_K |\operatorname{grad} f|^2\,dV$.

Lösning: Först och främst har vi att $\operatorname{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ så $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = $ $= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial z^2}$ och $|\operatorname{grad} f|^2 = \left(\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2}\right)^2 = (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial^2 f}{\partial z})^2$ varmed

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial K} f\cdot(\operatorname{grad} f)\cdot\boldsymbol{N}\,dS &= \iint_{\partial K} f\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot\boldsymbol{N}\,dS \\
&= \iint_{\partial K}\left(f\cdot\frac{\partial f}{\partial x}, f\cdot\frac{\partial f}{\partial y}, f\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot\boldsymbol{N}\,dS \\
&\overset{\text{Gauss sats}}{=} \iiint_K \operatorname{div}\left(f\cdot\frac{\partial f}{\partial x}, f\cdot\frac{\partial f}{\partial y}, f\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_K\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + f\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + f\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} + f\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dV \\
&= \iiint_K\left((\tfrac{\partial f}{\partial x})^2 + (\tfrac{\partial f}{\partial y})^2 + (\tfrac{\partial f}{\partial z})^2 + f\cdot(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \tfrac{\partial^2 f}{\partial z^2})\right)dV \\
&= \iiint_K\left(|\operatorname{grad} f|^2 + f\cdot\underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)}_{=0}\right)dV \\
&= \iiint_K |\operatorname{grad} f|^2\,dV
\end{aligned}$$

□

[1]Operatorn div(grad) brukar kallas *Laplaceoperatorn* och betecknas ibland Δ, dvs $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Gradienten $\operatorname{grad} f$ brukar ibland skrivas ∇f och med "logiken bakom nablaräkning" är $\Delta = \nabla^2$ (se s. 386–389).