Högskolan i Halmstad

Kapitel 9: Vektoranalys i planet

Vektoranalys är mycket viktigt för bl.a. många tillämpningar inom fysiken och handlar om att studera *vektorfält*, dvs funktioner $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, så i specialfallet med $n = 2$ (dvs i planet) handlar det om $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (P(x,y), Q(x,y))$.

Integralen

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{r} \;=\; \int_\alpha^\beta \Big(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\Big)\,dt$$

kallas **kurvintegralen** över kurvan γ om

- $\gamma = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ då $\alpha \le t \le \beta$ är en orienterad $\mathcal{C}^1$-kurva och
- $\boldsymbol{F}$ är definierad på γ med värdemängd i $\mathbb{R}^2$.

Då $x'(t)dt = \frac{dx}{dt}dt = dx$ och $y'(t)dt = \frac{dy}{dt}dt = dy$ är det intuitivt att integralen $\int_\alpha^\beta (P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t))dt$ kortare kan skrivas $\int_\gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$.

Exempel Beräkna kurvintegralen av $x(y+1)\,dx + (x^2+y)^2\,dy$ längs $\gamma = \partial D$ som är orienterad där $D = \{(x,y) : |x| \le 1, x^2 \le \frac{1}{2}(x^2+y+1) \le 1\}$.

Lösning: Efter att ha multiplicerat alla led i $x^2 \le \frac{1}{2}(y + x^2 + 1) \le 1$ med 2 och subtraherat med x^2 och 1 fås att D är området $\{-1 \le x \le 1, x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2\}$. Låt oss dela upp γ som $\gamma_1 + \gamma_2$ där $\gamma_1 : (x,y) = (-t, 1-t^2),\ -1 \le t \le 1$ och $\gamma_2 : (x,y) = (t, t^2-1),\ -1 \le t \le 1$. Då är $\int_{\gamma_1} x(y+1)\,dx + (x^2+y)^2\,dy =$ $= \int_{-1}^1 \Big((-t)(1-t^2+1)\cdot(-1)+((-t)^2+1-t^2)^2\cdot(-2t)\Big)\,dt = \int_{-1}^1 \Big(t(2-t^2)-2t\Big)\,dt = 0$ och $\int_{\gamma_2} x(y+1)\,dx + (x^2+y)^2\,dy = \int_{-1}^1 \Big(t(t^2-1+1)\cdot 1 + (t^2+t^2-1)^2\cdot 2t\Big)\,dt =$ $\int_{-1}^1 (t^3 + (4t^4 - 4t^2 + 1)2t)\,dt = \int_{-1}^1 (8t^5 - 7t^3 + 2t)\,dt = [\frac{8}{6}t^6 - \frac{7}{4}t^4 + t^2]_{-1}^1 = 0$ varmed slutligen $\int_\gamma x(y+1)\,dx + (x^2+y)^2\,dy = 0 + 0 = 0$. □

Sats 1 (s. 335) *Greens formel*
Om $P, Q \in \mathcal{C}^1$ definerade på Ω öppen i $\mathbb{R}^2$
D kompakt i Ω
$\partial D = \bigcup_i \gamma_i$ där $\gamma_i \in \mathcal{C}^1$ pos. orienterade
så $\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \;=\; \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dx\,dy$

Observera att det är Q som deriveras partiellt m.a.p. x respektive P som deriveras partiellt m.a.p. y och inte tvärtom. Läs beviset!

Exempel Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma 3xy\,dx+2x^2dy$ där γ är den positivt orienterade randen till området som begränsas av $0 \le x \le 3$ och $x(x-2) \le y \le x$.

Lösning Genom att använda Greens formel förelnklas räkningarna: med $P = 3xy$ och $Q = 2x^2$ är $\int_\gamma 3xy\,dx+2x^2dy = \iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,dx\,dy = \int_0^3(\int_{x^2-2x}^x (4x-3x)\,dy)\,dx =$ $= \int_0^3 [xy]_{x^2-2x}^x dx = \int_0^3 (3x^2 - x^3)\,dx = [x^3 - \frac{x^4}{4}]_0^3 dx = \frac{27}{4}$. □

Obs! Vid användning av Greens formel är det mycket viktigt att kontrollera att förutsättningarna är uppfyllda!

Exempel Beräkna
$$\int_\gamma \frac{y\,dx + x\,dy}{\ln(1+x+y)}$$
där γ är den orienterade begränsningen av $-2 \le 2y+2x \le -1$ och $-1 \le 2y-2x \le 0$.

Lösning: Låt $P = \frac{y}{\ln(1+x+y)}$ och $Q = \frac{x}{\ln(1+x+y)}$. Då är P och Q kontinuerliga $\mathcal{C}^1$-funktioner på alla kompakta delmängder av $\{(x,y) : -1 < x+y \le -\frac{1}{2}\}$. Eftersom $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1\cdot\ln(1+x+y) - y\cdot\frac{1}{1+x+y}}{(\ln(1+x+y))^2}$ och $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1\cdot\ln(1+x+y) - x\cdot\frac{1}{1+x+y}}{(\ln(1+x+y))^2}$ så är enligt Greens formel $\int_\gamma \frac{y\,dx+x\,dy}{\ln(1+x+y)} = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dx\,dy = \iint_D \frac{y-x}{(1+x+y)(\ln(1+x+y))^2}\,dx\,dy =$
$\left\{\begin{array}{ll} u = y-x & -\frac{1}{2} \le u \le 0 \\ v = y+x & -1 \le v \le -\frac{1}{2} \end{array} \quad J(u,v) = -\frac{1}{2}\right\} \int_{-1/2}^{0} (\int_{-1}^{-1/2} \frac{2u}{(1+v)(\ln(1+v))^2}\,dv)\,du =$
$\left\{\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{(\ln x)^2} \overset{P.I.}{=} \ln x \cdot \frac{1}{(\ln x)^2} - \int \ln x \cdot \frac{-2}{(\ln x)^3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{\ln x} + 2\int\frac{dx}{x(\ln x)^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{x(\ln x)^2} = -\frac{1}{\ln x}\right\}$
$= 2\int_{-1/2}^{0} u[-\frac{1}{\ln(1+v)}]_{-1}^{-1/2} du = 2(\frac{1}{-\ln\frac{1}{2}} - 0)[\frac{u^2}{2}]_{-1/2}^{0} = -\frac{1}{4\ln 2}$. □

Om $\boldsymbol{F}$ är ett kraftfält och $\boldsymbol{T}$ är en vektor så är skalärprodukten $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}$ det *arbete* som $\boldsymbol{F}$ utför (se s. 334 och s. 360).

Exempel Kraftfältet $\boldsymbol{F} = (P,Q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av $P(x,y) = Q(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2+(x+y)^2}} + 2x^2 + 3xy + y^2$. Beräkna det arbete som $\boldsymbol{F}$ uträttar längs cirkelbågen $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 0$ från $(0,0)$ till $(-2,2)$ moturs.

Lösning: Om man sluter halvcirkeln med linjestycket $\ell : x+y = 0$ från $(-2,2)$ till $(0,0)$ fås den slutna orienterade kurvan γ och arbetet som $\boldsymbol{F}$ utför längs γ är $\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x}$ där $\boldsymbol{F} = (P,Q)$ och $d\boldsymbol{x} = (dx,dy)$ varmed $\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x} = \int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ där P och Q är $\mathcal{C}^1$-funktioner på hela $\mathbb{R}^2$. Cirkelbågen kan efter kvadratkomplettering skrivas $0 = x^2+2x+y^2-2y = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 2$, dvs den är halva cirkeln med radie $\sqrt{2}$ och mittpunkt i $(-1,1)$. För beräkning av denna kurvintegral kan vi alltså använda Greens formel varmed $\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x} = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dx\,dy$ där D är halvcirkelytan beskriven ovan. Vi har att $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{2}(2+(x+y)^2)^{-3/2}2(x+y)+4x+3y$ och $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2}(2+(x+y)^2)^{-3/2}2(x+y)+3x+2y$ varmed $\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x} = \iint_D (x+y)\,dx\,dy =$
$\left\{\begin{array}{ll} x = -1 + r\cos\theta & -\frac{\theta}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4} \\ y = 1 + r\sin\theta & 0 \le r \le \sqrt{2} \end{array} \quad J(x,y) = r\right\} \int_0^{\sqrt{2}} (\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (-1 + r\cos\theta + 1 + \sin\theta) r\,d\theta)\,dr =$
$\int_0^{\sqrt{2}} r^2[\sin\theta - \cos\theta]_{-\pi/4}^{3\pi/4} dr = \int_0^{\sqrt{2}} = [\frac{r^3}{3}]_0^{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}} - (-\frac{1}{\sqrt{2}}) - (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{8}{3}$. Eftersom kurvintegralen längs linjestycket ℓ är 0 är arbetet som $\boldsymbol{F}$ utför längs cirkelbågen $\frac{8}{3}$. □

Om det finns en $\mathcal{C}^1$-funktion, U, så att $\boldsymbol{F} = (P,Q) = \operatorname{grad} U$ så kallas $\boldsymbol{F}$ **konservativt fält** i Ω och U kallas **potential** till $\boldsymbol{F}$.

Läs om Potentialer och exakta differentialformer på s. 344–358.