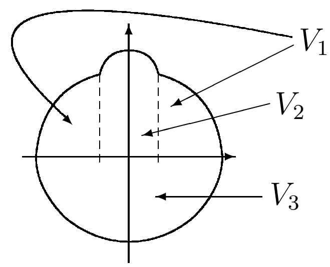
© 2006 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

Kapitel 8: Användningar av integraler

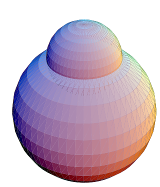
Exempel En dykarklocka med "utkikstorn" ska byggas. Dess form begränsas av $(1) : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $(2) : x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{3}\, z = -\frac{1}{2}$. Beräkna dykarklockans volym.

Lösning: Skärningslinjen mellan de båda ytorna fås av att först beräkna $(1) - (2)$: $0 - (-\sqrt{3}\, z) = 1 - (-\frac{1}{2}) \;\Leftrightarrow\; z = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Om detta dessutom sätts in i (1) resp. (2) fås totalt att $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ och $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dvs skärningslinjen är cirkeln med radie $\frac{1}{2}$, parallell med x-y-planet, på nivå $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Detta innebär att vi kan dela in volymberäkningen i 3 delar:

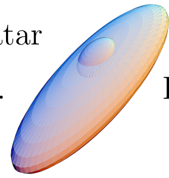


1. $V_1 = \iint_{D_1} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$ där $D_1 = \{(x, y) : \frac{1}{4} \le x^2 + y^2 \le 1\}$
   $\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \; J(x, y) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{array} \right| = r \right\}$
   $V_1 = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^{1} \sqrt{1 - r^2}\, r\, dr\, d\theta = \left\{ \begin{array}{l} u = r^2 \\ du = 2r\, dr \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \int_{1/4}^{1} \sqrt{1 - u}\, \frac{1}{2}\, du\, d\theta =$
   $= \frac{1}{2}\, 2\pi [-\frac{2}{3}(1 - u)^{3/2}]_{1/4}^{1} = \pi(0 - (-\frac{2}{3}(1 - \frac{1}{4})^{3/2})) = \pi \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{3}{4}} \right)^3 = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}$.
2. Den övre halvan av den lilla sfären $x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{3}\, z = -\frac{1}{2}$ begränsar dykarklockans utkikstorn. För att integrera fram volymen ner mot x-y-planet löser vi först ut z. Kvadratkomplettering ger $x^2 + y^2 + (z - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow$ $(z - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} - x^2 - y^2 \;\Leftrightarrow\; z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2}$ eftersom det var övre halvan det gällde. Därmed är volymen $\iint_{D_2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2} \right) dx\, dy$ där $D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le \frac{1}{4}\}$ så med $\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \; J(x, y) = r \right\}$ har vi
   $V_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - r^2} \right) r\, dr\, d\theta \overset{u=r^2}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{1/4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - u} \right) \frac{1}{2}\, du\, d\theta =$
   $= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} u - \frac{2}{3}(\frac{1}{4} - u)^{3/2} \right]_0^{1/4} d\theta = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{24}(3\sqrt{3} + 2)$.
3. Volymen av halva enhetssfären $V_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Därmed är den totala volymen av dykarklockan
$V_1 + V_2 + V_3 = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi(3\sqrt{3}+2)}{24} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{8}(2 + \sqrt{3})$.



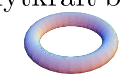
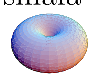
□

Att kunna beräkna volyminnehåll kan vara mycket viktigt vid en mängd tillämpningar såsom byggnad av bilar, ubåtar  , flygplan, m.m. Också beräkning av mantelarea kan vara av intresse. En yta i rymden, $\boldsymbol{f}(s,t)$ där $s,t \in D$, har arean $\iint_D |\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}|\, ds\, dt$.

Exempel Ett företag tillverkar badringar vars form kan beskrivas matematiskt som $\boldsymbol{f}(\theta,\phi) = ((R + r\cos\theta)\cos\phi,\ (R + r\cos\theta)\cos\phi,\ r\sin\theta)$ där R är storradien, r är lillradien, $0 \le \theta \le 2\pi$ och $0 \le \phi \le 2\pi$.

(a) Beräkna badringens volym.

(b) Beräkna badringens mantelarea.

(c) Företaget vill minimera materialåtgången i förhållande till den flytkraft badringen ger. Vinner de på att göra smala badringar med stort hål  eller tjocka badringar med litet hål  ?

Lösning:

(a) Vi kan utan inskränkning av generaliteten av lösningen att storradien är 1. Då är $(x,y,z) = ((1+r\cos\theta)\cos\phi, (1+r\cos\theta)\sin\phi, r\sin\theta)$. Integrera Jacobianen m.a.p. $0 \le \rho \le r$, $0 \le \theta \le 2\pi$ och $0 \le \phi \le 2\pi$: $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \frac{d(x,y,z)}{d(\rho,\theta,\phi)}\, d\rho\, d\theta\, d\phi =$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\rho\sin\theta\cos\phi & -(1+\rho\cos\theta)\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & (1+\rho\cos\theta)\cos\phi \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} d\rho\, d\theta\, d\phi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} r\sin^2\theta(1+\rho\cos\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\rho\cos^2\theta(1+r\cos\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\, d\rho\, d\theta\, d\phi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \rho(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\rho^2\cos\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r^2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{r}{3}\cos\theta)\, d\theta\, d\phi = 2\pi^2 r^2$$

(b) $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial\theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial\phi}|\, d\theta\, d\phi =$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\left(\begin{vmatrix} -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta \\ (1+r\cos\theta)\cos\phi & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -r\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta \\ -(1+r\cos\theta)\sin\phi & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -r\sin\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ -(1+r\cos\theta)\sin\phi & (1+r\cos\theta)\cos\phi \end{vmatrix} \right)\right| d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{(r\cos\theta(1+r\cos\theta)\cos\phi)^2+(r\cos\theta(1+r\cos\theta)\sin\phi)^2+(r\sin\theta(1+r\cos\theta)\cos^2\phi+r\sin\theta(1+r\cos\theta)\cos^2\phi)^2}\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(1+r\cos\theta)\, d\theta\, d\phi = 2\pi r[\theta + r\sin\theta]_0^{2\pi} = 4\pi^2 r$$

(c) Förhållandet mellan materialåtgången (mantelarean) och flytkraften (volymen) är därmed $\frac{4\pi^2 r}{2\pi^2 r^2} = \frac{2}{r}$, dvs ju tjockare torus desto större volym. Därmed har torusen optimal flytkraft i förhållande till materialåtgången om $r = 1$, men eftersom vi fixerat $R = 1$ innebär detta att ringen blir just så tjock att hålet försvunnit... $\square$

Läs intensivt s. 311–316 och extensivt resten av kapitlet.