Högskolan i Halmstad

Kapitel 7: Multipelintegraler

På samma sätt som integralbegreppet kan utvidgas till två dimensioner kan vi fortsätta att utvidga det till tre eller fler helt analogt med hur vi definierade och beräknade dubbelintegraler.

Exempel Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_D \sqrt{xyz}\,dx\,dy\,dz$$

där $D = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$.

Lösning: Integrationsområdet D kan vi skriva som

$$\{(x,y,z) : x\in[0,y] \ \wedge\ y\in[0,z] \ \wedge\ z\in[0,1]\}$$

varmed $\int\int\int_D \sqrt{xyz}\,dx\,dy\,dz = \underbrace{\int_0^1 (\underbrace{\int_0^z (\underbrace{\int_0^y \sqrt{xyz}\,dx}_{I})\,dy}_{II})\,dz}_{III}$

$I = \int_0^y \sqrt{xyz}\,dx = \int_0^y (yz)^{1/2} x^{1/2} dx = [(yz)^{1/2}\frac{3}{2}x^{2/3}]_0^y = \frac{3}{2}(yz)^{1/2}(y^{2/3}-0) = \frac{3}{2}y^{7/6}z^{1/2}$.
$II = \int_0^z \frac{3}{2}y^{7/6}z^{1/2}dy = \frac{3}{2}z^{1/2}[\frac{6}{13}y^{13/6}]_0^z = \frac{9}{13}z^{1/2}(z^{13/6}-0) = \frac{9}{13}z^{8/3}$.
$III = \int_0^1 \frac{9}{13}z^{8/3}dz = \frac{9}{13}\cdot\frac{3}{11}[z^{11/3}]_0^1 = \frac{27}{143}$.
Sammanfattningsvis har vi därmed kommit fram till att $\int\int\int_D \sqrt{xyz}\,dx\,dy\,dz =$
$= \int_0^1(\int_0^z(\int_0^y (xyz)^{1/2}dx)\,dy)\,dz = \int_0^1(\int_0^z \frac{3}{2}y^{7/6}z^{1/2}dy)\,dz = \int_0^1 \frac{9}{13}\,z^{8/3}dz = \frac{27}{143}$. □

Exempel Beräkna multipelintegralen $\iint\cdots\int_D e^{-x_n}dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_n$ där D är "hypertriangeln" $\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) : 0 \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \ldots \leq x_1 \leq 1\}$.

Lösning: En fullständig lösning skulle kunna göras som ett induktionsbevis, men då måste vi först ha ett antagande att bevisa och det försöker vi härleda så här:
$\iint\cdots\int_D e^{-x_n}dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_n = \int_0^1\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-2}}(\int_0^{x_{n-1}} e^{-x_n}dx_n)\,dx_{n-1}\,\ldots\,dx_2\,dx_1 =$
$= \int_0^1\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-3}}(\int_0^{x_{n-2}}[-e^{-x_n}]_0^{x_{n-1}}dx_{n-1})\,dx_{n-2}\,\ldots\,dx_2\,dx_1 =$
$= \int_0^1\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-3}}(\int_0^{x_{n-2}}(-e^{-x_{n-1}}+1)\,dx_{n-1})\,dx_{n-2}\,\ldots\,dx_2\,dx_1 =$
$= \int_0^1\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-4}}(\int_0^{x_{n-3}}[e^{-x_{n-1}}+x_{n-1}]_0^{x_{n-2}}dx_{n-2})\,dx_{n-3}\,\ldots\,dx_2\,dx_1 =$
$= \int_0^1\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-4}}(\int_0^{x_{n-3}}(e^{-x_{n-2}}+x_{n-2}-1-0)\,dx_{n-2})\,dx_{n-3}\,\ldots\,dx_2\,dx_1 =$
$= \int_0^1\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-5}}(\int_0^{x_{n-4}}[-e^{-x_{n-2}}+\frac{x_{n-2}^2}{2}-x_{n-2}]_0^{x_{n-3}}\,dx_{n-3})\,dx_{n-4}\,\ldots\,dx_2\,dx_1 =$
$\vdots$
$= \int_0^1\left((-1)^{n-1}e^{-x_1}+\frac{x_1^{n-1}}{(n-1)!}-\frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+(-1)^{n-1}x_1\right)dx_1 =$
$= (-1)^n e^{-1}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{0!}+1 = (-1)^n e^{-1}+1+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(n-k)!}$.
Själva induktionsbeviset lämnas som en övning. □

Substitution med rymdpolära koordinater

I vissa trippelintegraler är polär substitution

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

(se Exempel 19, s. 27–29) att föredra. Skalförändringen som sker vid denna substitution anges då av Jacobianen $J(x,y,z) = \frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\phi)} = r^2\sin\theta$ (se Exempel 13, s. 140–141) varmed

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_E f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

Integrationsområdet D i xyz-systemet måste dock översättas till motsvarande område E i $r\theta\phi$-systemet där $r \in [0,\infty)$, $\theta \in [0,\pi]$ och $\phi \in [0,2\pi]$. Anledningen till att man aldrig behöver negativ radie r är naturligtvis att r är avståndet till origo i x-y-z-systemet och avstånd är aldrig negativa. Anledningen till att vi aldrig behöver negativa vinklar är såklart att det räcker att göra ett varv i positiv riktning och fallet med θ räcker ett halvt varv. Man kan naturligtvis t. ex. istället låta $-\pi \le \phi \le \pi$, man måste bara se till att man täcker alla rymdsektorer. Om man däremot låter $0 \le \theta \le 2\pi$ och $0 \le \phi \le 2\pi$ blir dock inte parametriseringen entydig och man tar med samma område flera gånger då man integrerar (se figurerna på s. 292–293).

Exempel Beräkna $\iiint\limits_D \frac{dx\,dy\,dz}{e^{(x-y)^2}\sqrt{z+z(x+y)^2}}$ där $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le \frac{1}{1+(x+y)^2}\}$.

Lösning:

$$\begin{aligned}
\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{e^{(x-y)^2}\sqrt{z+z(x+y)^2}} &= \iint_{\mathbb{R}^2}\left(\int_0^{(1+(x+y)^2)^{-1}} \frac{dz}{e^{(x-y)^2}\sqrt{z}\,\sqrt{1+(x+y)^2}}\right)dx\,dy \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{e^{(x-y)^2}\sqrt{1+(x+y)^2}}\Big[2\sqrt{z}\Big]_0^{(1+(x+y)^2)^{-1}}\,dx\,dy \\
&= 2\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{e^{(x-y)^2}\sqrt{1+(x+y)^2}} \\
&\quad \left\{\begin{array}{l} s = x+y \\ t = x-y \end{array}\quad J(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\right\} \\
&= 2\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\frac{1}{2}\,ds\,dt}{e^{t^2}(1+s^2)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt \int_{\mathbb{R}} \frac{ds}{1+s^2} \\
&= \sqrt{\pi}\Big[\arctan s\Big]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \sqrt{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \pi^{3/2}
\end{aligned}$$

□