© 2006 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

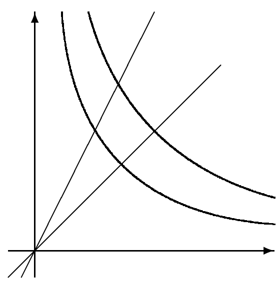
forts. Kapitel 6: Dubbelintegraler

Variabelsubstitution

Sats (*s.* 261)
Om $\boldsymbol{x} = (x, y) = (g(u,v), h(u,v))$ bijektiv $\mathcal{C}^1$-avbildning
$\boldsymbol{x} : D \to E$ där D, E är öppna i $\mathbb{R}^2$ så att Jacobianen $J(u,v) = \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \neq 0$ i E
och integranderna är integrerbara över D resp. E
så $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f(g(u,v), h(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$

Exempel Beräkna $\iint_D y^2 \sin^2 dx\,dy$ där $D = \{(x,y) : 1 \leq xy \leq 2, 0 \leq x \leq y \leq 2x\}$.

Lösning: Till att börja med är det *alltid* bra att bilda sig en god uppfattning om integrationsområdet.



Av denna illustration inses att den undre gränsen 0 i villkoret $0 \leq x \leq y \leq 2x$ är till för att skilja området från motsvarande yta i kvadranten där $x < 0, y < 0$. Därmed har vi att området kan skrivas $D = \{(x,y) : 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2\}$ vilket antyder att substitutionen

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$$

skulle kunna röna viss framgång. Motsvarande integrationsområde blir då rektangulärt: $E = \{(u,v) : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2\}$ och Jacobianen blir $J(u,v) = \frac{d(x,y)}{d(u,v)} =$
$= (\frac{d(u,v)}{d(x,y)})^{-1} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \right)^{-1} = \left(\begin{vmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{2y/x} = \frac{x}{2y}$. Därmed är
$\iint_D y^2 \sin y^2 dx\,dy = \iint_E y^2 \sin y^2 |\frac{x}{2y}|\,du\,dv = \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{1}{2} u \sin(uv)\,dv \right) du =$
$= \frac{1}{2} \int_1^2 (-\cos(2u) + \cos u) du = \frac{1}{2}(-\frac{\sin(2\cdot 2)}{2} + \frac{\sin(2\cdot 1)}{2} + \sin 2 - \sin 1) = -\frac{\sin 4}{4} + \frac{3 \sin 2}{4} - \frac{\sin 1}{2}$.
□

Exempel Beräkna arean av det elliptiska området $4x^2 + 9y^2 \leq 25$ i x-y-planet.

Lösning: Först observerar vi att koefficienterna 4 och 9 och "radien" 25 innebär att ellipsen har halvaxlarna $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$ och $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ varmed vi är anledda att pröva med substitutionen

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} r \cos\theta \\ y = \frac{3}{5} r \sin\theta \end{cases}$$

varmed det elliptiska området $D = \{(x,y) : 4x^2 + 9y^2 \leq 25\}$ även kan skrivas

$E = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Jacobianen blir $\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{5}\cos\theta & -\frac{2}{5}r\sin\theta \\ \frac{3}{5}\sin\theta & \frac{3}{5}r\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{6r}{25}$. Därmed får man arean av ellipsen genom att integrera 1 över ellipsområdet: $A(D) = \iint_D 1\,dx\,dy = \iint_E \frac{6r}{25}\,dr\,d\theta = \frac{6}{25}\int_0^1 r(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta)\,dr = \frac{6\pi}{25}$. □

Generaliserade dubbelintegraler

Hittills har integrationsområdena varit begränsade men även dubbelintegraler kan definieras på obegränsade områden. Exempel 19 (s. 272–273) illustrerar dock att detta måste göras med viss eftertanke. Typiskt brukar integration över ett obegränsat område, D, defineras genom att man integrerar över ett begränsat område D_n sådant att $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq \ldots$ och $D_n \nearrow D$ varmed $\iint_D f = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f$. I praktiken gör man dock inte konstruktioner med följder av mängder som växer mot integrationsområdet som vi ska se. Ett festligt bonusresultat från generaliserad integration av $e^{-x^2-y^2}$ över $\mathbb{R}^2$ är att enkelintegralen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ (mycket viktigt inom sannolikhetsteorin och statistiken), se Exempel 21, s. 277–278.

Exempel Beräkna

(a) $\iint_D \ln y\,dx\,dy$ där $D = \{$triangeln med hörn i $(0,0),(1,0),(1,1)\}$,

(b) $\iint_{\mathbb{R}^2} xye^{-x^2-xy-y^2}dx\,dy$.

Lösning:

(a) Denna integral är ett exempel på obegränsad integrand och är generaliserad i $y = 0$ och i $x = 0$. Vi får

$$I = \iint_D \ln y\,dx\,dy = \int_0^1(\int_0^x \ln y\,dy)\,dx = \int_0^1 \lim_{\epsilon\to 0}[y\ln y + y]_\epsilon^x\,dx =$$

$$= \int_0^1 x\ln x + x\,dx = \lim_{\eta\to 0}([x(x\ln x + x)]_\eta^1 - \underbrace{\int_\eta^1 1\cdot(x\ln x + x)\,dx}_{I} + [\tfrac{1}{2}x^2]_\eta^1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2I = \lim_{\eta\to 0}[x^2\ln x + x^2 + \tfrac{1}{2}x^2]_\eta^1 \Rightarrow \iint_D \ln y\,dx\,dy = \tfrac{1}{2}(0 + \tfrac{3}{2} - 0 - 0) = \tfrac{3}{4}.$$

(b) Denna integral är exempel på obegränsat integrationsområde. Det är också ett exempel på integrand med växlande tecken. Med hänvisning till texten på s. 276 kan vi beräkna denna integral med variabelsubstitution som vanligt. Vi får $\iint_{\mathbb{R}^2} xye^{-x^2-xy-y^2}dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} xye^{-(x+\frac{1}{2}y)^2-\frac{3}{4}y^2}dx\,dy$. Kvadratkompletteringen görs för substitutionen: $\left\{ \begin{array}{lll} u = x + \frac{1}{2}y & x = u - \frac{1}{\sqrt{3}}v & \\ v = \frac{\sqrt{3}}{2}y & y = \frac{2}{\sqrt{3}}v & \end{array} J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$ varmed $\iint_{\mathbb{R}^2} xye^{-(x+\frac{1}{2}y)^2-\frac{3}{4}y^2}dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2}(u - \frac{1}{\sqrt{3}}v)\frac{2}{\sqrt{3}}ve^{-u^2-v^2}\frac{1}{\sqrt{3}/2}\,du\,dv =$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \tfrac{4}{3}ue^{-u^2}ve^{-v^2} - \tfrac{4}{3\sqrt{3}}e^{-u^2}v^2e^{-v^2}du\,dv = \tfrac{4}{3}\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} ue^{-u^2}du}_{I}\Big)^2 - \tfrac{4}{3\sqrt{3}}\underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}du}_{II}\underbrace{\int_{\mathbb{R}} v^2e^{-v^2}dv}_{III}$$

där $I = \int_{\mathbb{R}} ue^{-u^2}du = [-\frac{1}{2}e^{-u^2}]_{-\infty}^{\infty} = 0$, $II = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$ och $III = \int_{\mathbb{R}} v\cdot ve^{-v^2}dv \overset{P.I.}{=} [-\frac{1}{2}e^{-v^2}v] + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}e^{-v^2}dv = 0 + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

varmed slutligen $\iint_{\mathbb{R}^2} xye^{-x^2-xy-y^2}dx\,dy = 0 - \frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. □

Läs även Exempel 28 och 29 om integrand med växlande tecken.