Högskolan i Halmstad

forts. Kapitel 10: Vektoranalys i rummet

Man kan även generalisera Greens formel på ett annat sätt som vi snart ska se, men låt oss först definiera **rotationen** av $\boldsymbol{u} = (P, Q, R)$ m.a.p. systemet $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ som $\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \times \boldsymbol{u} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$. Med beteckningen ∇ för operatorvektorn $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ kan $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$ även skrivas som $\nabla \times \boldsymbol{u}$.

Nu kan vi formulera Stokes sats.

Sats 2 (s. 380) *Stokes sats*
Om $\boldsymbol{u}$ är ett $\mathcal{C}^1$-fält definierat på öppet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$
Y orienterad yta på Ω med orienterad rand ∂Y
så $\int_{\partial Y} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{N}\, dS$

Exempel Beräkna $\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{N}\, dS$ där $\boldsymbol{u} = (z, 2x, -3y)$ och S är den paraboliska ytan $z = x^2 + y^2$ som begränsas uppåt av $z \leq 4$ och vars orientering ges av den uppåtriktade normalen.

Lösning: Eftersom $\nabla \times \boldsymbol{u}$ bara är en omskrivning av $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$ kan vi använda Stokes sats för att beräkna ytintegralen som en kurvintegral: $\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u}\, dS = \int_{\partial S} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r}$. För detta ändamål parametriserar vi den kurva ∂S som begränsar S, dvs cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ där $z = 4$. Parametrisering av cirkeln med planpolära koordinater blir därmed $\boldsymbol{r}(t) = (x, y, z) = (2\cos t, 2\sin t, 4)$ varmed $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz) = = (-2\sin t\, dt, 2\cos t\, dt, 0)$ så Stokes sats ger att

$$
\begin{aligned}
\iint_S \underbrace{(\nabla \times \boldsymbol{u})}_{\operatorname{rot}\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{N}\, dS &= \int_{\partial S} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r} \\
&= \int_{\partial S} z\, dx + 2x\, dy - 3y\, dz \\
&= \int_0^{2\pi} 4 \cdot (-2\sin t\, dt) + 2 \cdot 2\cos t \cdot 2\cos t\, dt - 3 \cdot 2\sin t \cdot 0\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-8\sin t + 4\cos^2 t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-8\sin t + 4 \cdot \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2t))\, dt \\
&= \Big[8\cos t + 2t + \sin 2t \Big]_0^{2\pi} \\
&= 4\pi
\end{aligned}
$$

□

Precis som begreppet "rotationen" antyder är rot $\boldsymbol{u}(x, y, z)$ ett mått på strömningsförhållandet i punkten (x, y, z). Därmed är det logiskt att ett fält $\boldsymbol{u}$ kallas *virvelfritt* om rot $\boldsymbol{u} = 0$

Exempel Visa att fältet $\boldsymbol{u} = (3\sqrt{x}, 5z^2, 10yz)$ är virvelfritt.

Lösning: Vi har att

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\boldsymbol{u} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \boldsymbol{u} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(10yz) - \frac{\partial}{\partial z}(5z^2)\,,\ \frac{\partial}{\partial z}(3\sqrt{x}) - \frac{\partial}{\partial x}(10yz)\,,\ \frac{\partial}{\partial x}(5z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(3\sqrt{x})\right) \\
&= (10z - 10z, 0, 0) \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

$\square$