Högskolan i Halmstad

Kapitel 5: Användningar av differentialkalkyl

Derivation under integraltecknet

Sats 1 (s. 184)
Om $f(s,x)$ och $\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)$ är kontinuerliga på $(\alpha,\beta)\times[a,b]$
så $\frac{d}{ds}\int_a^b f(s,x)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\,dx$ för $\alpha < s < \beta$.

Läs beviset!

Denna sats innebär en möjlighet att beräkna derivatan av en funktion definierad genom en integral utan att behöva genomföra integreringen *innan* man deriverar.

Exempel Beräkna derivatan m.a.p. θ av $\int_\epsilon^1 \frac{e^{-\theta t}}{t}\,dt$ där $0 < \epsilon < 1$ och $\theta > 0$.

Lösning: Klart att $\frac{e^{-\theta t}}{t}$ och $\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{e^{-\theta t}}{t}) = -e^{\theta t}$ är kontinuerliga för $(\theta,t)\in(0,\infty)\times[\epsilon,1]$. Därmed är $\frac{d}{d\theta}(\int_\epsilon^1 \frac{e^{-\theta t}}{t}\,dt) = \int_\epsilon^1 \frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{e^{-\theta t}}{t})\,dt = [-\frac{e^{-t\theta}}{\theta}]_\epsilon^1 = -\frac{e^{-\theta}}{\theta} + \frac{e^{-\epsilon\theta}}{\theta} = \frac{e^{-\epsilon\theta}-e^{-\theta}}{\theta}$. $\square$

En något vassare variant av Sats 1 är Sats 2 där man tillåter den variabel man deriverar m.a.p. ingå i integrationsgränserna. Detta är helt enkelt en tillämpning av kedjeregeln i kombination med Sats 1.

Vidare har vi även Sats 3 som ger motsvarande villkor för derivering under generaliserade integraler.

Sats 3 (s. 189)
Om $f(s,x)$ och $\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)$ är kontinuerliga på $(\alpha,\beta)\times[a,\infty)$
$\int_a^\infty f(s,x)\,dx$ är konvergent för $s\in(\alpha,\beta)$
$\forall\,[\alpha',\beta']\subset(\alpha,\beta)\,\exists\, g : \big(|\frac{\partial f}{\partial s}| \le g(x)$ för $s\in[\alpha',\beta']$, $x \ge a$ och $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konv.$\big)$
så $\frac{d}{ds}\int_a^\infty f(s,x)\,dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\,dx$ för $s\in(\alpha,\beta)$.

Läs beviset! Observera även att motsvarande sats också gäller då integralen är generaliserad i den undre gränsen. För att illustrera detta ger jag nedan ett exempel på det.

Exempel Beräkna $\frac{d}{ds}\int_0^1 x^{-1/3}\sin(sx^{1/3})\,dx$.

Lösning: Vi har att $x^{-1/3}\sin(sx^{1/3})$ och dess derivata m.a.p. s, $\cos(sx^{1/3})$, är kontinuerliga på $\mathbb{R}\times(0,1]$ och $\cos(sx^{1/3})$ är majorerad av 1 (ty $|\cos(sx^{1/3})| \le 1$ på $[0,1]$ och $\int_0^1 1\,dx = 1 < \infty$). Alltså är

$$\frac{d}{ds}\int_0^1 x^{-1/3}\sin(sx^{1/3})\,dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}(x^{-1/3}\sin(sx^{1/3}))\,dx = \int_0^1 \cos(sx^{1/3})\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{x} \\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \end{array} \right\} = \int_0^1 \underbrace{\cos(su)}_{f}\,\underbrace{2u}_{g}\,du \overset{\text{P.I.}}{=} 2u\,\frac{\sin(su)}{s} - \int_0^1 2\,\frac{\sin(su)}{s}\,du =$$

$$= \frac{2}{s}[u\sin(su) + \frac{1}{s}\cos(su)]_0^1 = \frac{2}{s^2}(s\sin s + \cos s - 1).$$ $\square$

Exempel Inom sannolikhetsteorin arbetar man med *fördelningsfunktioner*, F, som har tolkningen av sannolikheter och vars derivata, f, kallas *täthetsfunktioner*. Antag att en slumpvariabel har fördelningsfunktionen $F(x) = -\int_0^1 e^{-x/t}\left(\frac{(x+t)^2}{t}+t\right)dt$, där $x \geq 0$. Bestäm maximum av slumpvariabelns täthetsfunktion.

Lösning: Integralen som definierar fördelningsfunktionen är inte möjlig att beräkna på vanligt sätt m.h.a. primitiva funktioner. För att beräkna täthetsfunktionen och dess maximum deriverar vi dock. Både integranden, $-e^{-x/t}(\frac{(x+t)^2}{t}+t)$, och dess derivata m.a.p. x, $\frac{x^2}{t^2}\,e^{-x/t}$, är kontinuerliga för $x \in \mathbb{R}^+$ och $t \in [\epsilon, 1]$ för alla $0 < \epsilon < 1$. Och $\frac{x^2}{t^2}e^{-x/t}$ är majorerad av 4 (ty $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, t \in [0,1] : \frac{x^2}{t^2}e^{-x/t} \leq 4e^{-2} < 4$ och $\int_0^1 4\,dt < \infty$). Därmed har vi enl. Sats 3 ovan att täthetsfunktionen är $f = \frac{dF}{dx} = -\int_0^1 \frac{d}{dx}(e^{-x/t}(\frac{(x+t)^2}{t}+t))\,dt = \int_0^1 \frac{x^2}{t^2}\,e^{-x/t}dt = \lim_{\epsilon\to 0+} x[e^{-x/t}]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0+} x(e^{-x/1}-e^{-x/\epsilon}) = xe^{-x}$. Maximum till denna täthetsfunktion fås av att lösa $\frac{d}{dx}(xe^{-x}) = e^{-x}(1-x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$. Ett teckenstudium $\left(\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline f' & +1 & 0 & -e^{-2} \\ \hline f & \nearrow & \overset{e^{-1}}{\max} & \searrow \end{array}\right)$ och en koll av ändpunkterna ($f(0) = 0$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$) visar att $x = 1$ är ett globalt maximum.$\square$

På s. 192–224 görs en presentation av tillämpbarheten av differentialkalkyl inom olika fysikområden och en mängd exempel ges. Dessa sidor rekommenderas framför allt till de som siktar på en fortsatt utblidningsbana mot fysiker eller ingenjör.

Några begrepp som tillhör "matematisk allmänbildning" är

- **Vågekvationen** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \;=\; c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ där c är en konstant.
  Denna ekvation beskriver svängande strängar, membran utbredning av ljus och ljud.
- **Värmeledningsekvatoinen** $\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ där c är en positiv konstant.
  Denna ekvation beskriver hur värme sprider sig genom ett homogent medium. Den har även tolkningar inom finansiell matematik där den kallas *Black-Scholes ekvation*.
- **Laplaceekvationen** $\Delta u \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \;=\; 0$ där $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
  Denna gäller i många tidsoberoende situationer och för potential.
- **Schrödingerekvationen** $i\,\frac{\partial u}{\partial t} + a\Delta u = 0$ där $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$, och $a \in \mathbb{R}$.
  Den här ekvationen förekommer i kvantmekaniken där man är intresserad av $|u|^2$ som har en sannolikhetstolkning.

Om $\sum_{k=1}^\infty u_k(x)$ är en konvergent positiv funktionsserie där termerna, $u_k(x)$, är kontinuerliga och definierade på ett öppet intervall (a, b), så är

$$\int_a^b \textstyle\sum_{k=1}^\infty u_k(x)\,dx \;=\; \displaystyle\sum_{k=1}^\infty \int_a^b u_k(x)\,dx$$

Exempel Då man härleder *Stefan-Boltzmanns lag* ur *Plancks strålningslag* behöver man beräkna integralen $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx$. Gör det!

Lösning: Först kan man observera att integralen är generaliserad i båda sina gränser. Eftersom $\frac{1}{e^x-1} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ känns igen som den geometriska serien $\sum_{k=1}^{\infty}(e^{-x})^k$ då $x > 0$ är $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x-1}\,dx = \int_0^{\infty} x^3 \sum_{k=1}^{\infty}(e^{-x})^k\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty} x^3 e^{-kx}\,dx = \left\{\begin{array}{c} u = kx \\ du = k\,dx \end{array}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\int_0^{\infty} u^3 e^{-u}\,du = 6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$. M.h.a. Fourieranalys (som vi inte går in på här) kan slutligen $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$ beräknas till $\frac{\pi^4}{90}$ varmed integralens värde är $\frac{\pi^4}{15}$. □

Roterande koordinatsystem och Lagrangepunkter

På s. 206–209 nämns något om roterande koordinatsystem och hur detta kan användas för att analysera partiklars rörelse i rummet och *centripetalacceleration* och *Coriolisacceleration* nämns som exempel på vad man kan åstadkomma med roterande koordinatsystem. Corioliskraften är den kraft som gör att badkarsvattnet skruvar sig ut motsols här uppe i Sverige men medsols nere i Australien då man tappar ur det ur badkaret.

På s. 122–126 nämndes något om partikel- och planetbanor (s.k. *centralrörelse*). I detta sammanhang kan man även berätta om *tre-kropparsproblemet*. Detta innebär kort att på sluten form matematiskt beskriva läget som funktion av tiden för 3 kroppar under ömsesidig gravitationspåverkan från varandra. År 1889 övertalade den svenske matematikern Mittag-Leffler (1846–1927) kung Oskar II att utlysa priset 2500 kronor i belöning till den som löste *n-kropparsproblemtet* men det har gått överraskande trögt beträffande lösningen av detta problem. I själva verket har n-kropparsproblemtet i det närmaste bevisats olösbart för $n \geq 3$. Den framgångsrike matematikern Poincaré (1854–1912) behandlade i en uppsats problemet med metoder som ledde till det som idag kallas *kaosteori* och 1994 bevisade Zhihong Xia att tre-kropparsproblemet inte är integrerbart, dvs att dess allmänna lösning kan inte beskrivas matematiskt på sluten form. Man har dock framgångsrikt lyckats angripa flera specialfall av det generella problemet. För hantering av ett sådant specialfall kan man använda roterande koordiatsystem varvid man kan härleda speciella jämviktspunkter (s.k. *Lagrangepunkter*) för en liten himlakropp intill två stora planeter. Det finns 5 sådana punkter där två av dessa är stabila och tre är instabila[1].

Krökning och torsion

En kurvas parametrisering är inte entydig (t.ex. beskrivs enhetscirkeln lika bra av $\boldsymbol{r}_1(t) = (t, \pm\sqrt{1-t^2})$ där $-1 \leq t \leq 1$ som av $\boldsymbol{r}_2(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ där $0 \leq \theta \leq 2\pi$). Både för att få en entydig definition och för att det visar sig användbart senare parametriserar vi i resten av kapitlet kurvor med båglängden, dvs om kurvan $\boldsymbol{r}$ är parametriserad med t där $\alpha \leq t \leq \beta$, substituera med $s = \int_\alpha^t |\boldsymbol{r}'(\tau)|\,d\tau$ så är tangentvektorn $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$, och denna har längd 1. **Krökningen** av kurvan $\boldsymbol{r}$ i punkten $\boldsymbol{r}(s)$ är $\kappa(s) = |\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}|$ (eller $|\frac{d\boldsymbol{e}}{ds}|$ där $\boldsymbol{e} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$). Vidare är $\frac{1}{\kappa}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$ **huvudnormalen** till kurvan $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}$ **krökningscentrum** och $\frac{1}{\kappa}$ dess **krökningsradie** i punkten $\boldsymbol{r}(s)$. Hur mycket en kurva "skruvar" sig genom rummet mäts med **torsion** som defineras $\tau = -\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\cdot\boldsymbol{n}$ där $\boldsymbol{b} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\times\boldsymbol{n}$.

För krökning och torsion gäller sambanden $\kappa = \frac{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}$ och $\tau = \frac{(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')\cdot\boldsymbol{r}'''}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|^2}$.
Läs Exempel 14 och extensivt 217–224.

[1]För mer läsning om detta rekommenderas *Bengtsson om klassisk fysik* av Hans-Uno Bengtsson.