© 2006 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

Kapitel 6: Dubbelintegraler

Dubbelintegraler innebär i denna kurs *Riemannintegraler* m.a.p. två variabler och definieras som gränsvärde av motsvarande "dubbel-Riemannsummor" helt i analogi med hur man definierar Riemannintegraler i en variabel.

Sats 1 (s. 233–234)
Om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrerbar över $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$
så finns ett tal $\lambda \in \mathbb{R}$ sådant att $\iint_\Delta \Phi\, dx\, dy \leq \lambda \leq \iint_\Delta \Psi\, dx\, dy$
för alla trappstegsfunktioner Φ, Ψ sådana att $\Phi \leq f \leq \Psi$ på Δ.

vilket ska kunna bevisas. **Dubbelintegralen**, $\iint_\Delta f\, dx\, dy$, av f över Δ definieras som detta tal λ. Detta är utförligt förklarat på s. 227–237.

För beräkning av dubbelintegraler är det i praktiken för det mesta tillräckligt att kunna tillämpa följande resultat.

Sats 2 (s. 235–236)
Om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrerbar över $\Delta = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$
enkelintegralerna $\int_c^d f(x, y)\, dy = F(x)$ och $\int_a^b F(x)\, dx$ existerar
så $\iint_\Delta f\, dx\, dy = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)\, dy)\, dx$

vilket också ska kunna bevisas. Därmed kan vi beräkna en hel del dubbelintegraler förutsatt att vi vet att funktionen är integrerbar, så nu skulle det sitta fint med ett enkelt tillräckligt villkor för att avgöra om en funktion är intebrerbar.

Sats 3 (s. 237–238)
Om f är kontinuerlig på $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ (kompakt rektangulärt område)
så f integrerbar och $\iint_\Delta f\, dx\, dy = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)\, dy)\, dx$

vilket även det ska kunna bevisas.

Exempel Låt $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{3}\}$ och beräkna dubbelintegralerna

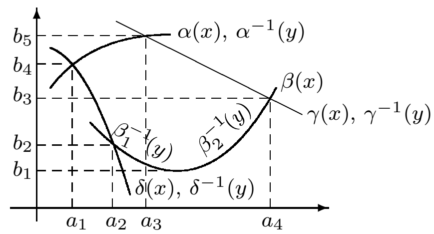
$$\iint_D \sin^2(x + 2y)\, dx\, dy \quad \text{och} \quad \iint_D \cos^2(x + 2y)\, dx\, dy$$

Lösning: Låt oss börja med $\iint_D \sin^2(x+2y)\, dx\, dy$. Vi vill skriva om $\sin^2(x+2y)$ så att kvadreringen försvinner. Vi har att $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$. Genom att först utföra integreringen över x kan vi nu skriva $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x+2y)\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos(2x+4y))\, dx = \frac{1}{2}[x - \frac{1}{2}\sin(2x+4y)]_0^{\pi/2} = = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\sin(4y+\pi)}_{-\sin(4y)} - 0 + \frac{1}{2}\sin(4y)) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin(4y)$. Därmed är

$\iint_D \sin^2(x + 2y)\, dx\, dy = \int_{\pi/4}^{\pi/3} (\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin(4y))\, dy = [\frac{\pi}{4}y - \frac{1}{8}\cos(4y)]_{\pi/4}^{\pi/3} = = \frac{1}{4}(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\cos(\frac{4\pi}{3}) - \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\cos(\pi)) = \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{8}(\frac{1}{2} - 1) = \frac{\pi^2-3}{48}$. Eftersom $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ är $\iint_D \cos^2(x+2y)\, dx\, dy = \iint_D (1-\sin^2(x+2y))\, dx\, dy = (\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2} - 0) - \frac{\pi^2-3}{48} = \frac{\pi^2+3}{48}$.
□

Integration över godtyckliga områden

Lär integrationsreglerna på s. 241–242 och läs extensivt om nollmängder på s. 242–245. Integrationsområden kan mer allmänt bekrivas som begränsade av funktioner av den "yttre" integrationsvariablen $\alpha(x), \beta(x), \ldots$. Antag t.ex. att vi vill integrera f över området D som begränsas av funktionerna $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x)$ m.a.p. x alternativt av $\alpha^{-1}(y), \beta_1^{-1}(y), \beta_2^{-1}(y), \gamma^{-1}(y), \delta^{-1}(y)$ m.a.p. y:



Då skulle dubbelintegralen av f över D bli

$$\iint_D f\,dx\,dy = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{\delta(x)}^{\alpha(x)} f\,dy \right) dx + \int_{a_2}^{a_3} \left(\int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} f\,dy \right) dx + \int_{a_3}^{a_4} \left(\int_{\beta(x)}^{\gamma(x)} f\,dy \right) dx$$

om man integrerade över y innerst och sedan x, och

$$\iint_D f\,dx\,dy = \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{\beta_1^{-1}(y)}^{\beta_2^{-1}(y)} f\,dx \right) dy + \int_{b_2}^{b_3} \left(\int_{\delta^{-1}(y)}^{\beta_2^{-1}(y)} f\,dx \right) dy + \int_{b_3}^{b_4} \left(\int_{\delta^{-1}(y)}^{\gamma^{-1}(y)} f\,dx \right) dy + \int_{b_4}^{b_5} \left(\int_{\alpha^{-1}(y)}^{\gamma^{-1}(y)} f\,dx \right) dy$$

om man istället integrerade m.a.p. x först och m.a.p. y sedan.

Tidigare i kursen har vi sett att deriveringsordningen inte spelar roll, dvs förutsatt att alla derivator existerar har det ingen betydelse för andraderivatan av f m.a.p. x och y om man först deriverar m.a.p. x och sedan m.a.p. y eller tvärtom. Motsvarande gäller visserligen för integraler: det har ingen betydelse för en dubbelintegrals *värde* om man först integrerar m.a.p. x och sedan m.a.p. y eller tvärtom *men det ha avgörande betydelse för lösbarheten!* Vissa integrander kan bli mycket svårintegrerade (och t.o.m. omöjliga att integrera) om man försöker på ena viset men helt ok om man istället gör på andra viset. I Exempel 1 på s. 238–239 undviker man en bökig partialbråksuppdelning genom att integrera m.a.p. y först.

Då gränserna är beroende av integrationsvariablerna måste man dock vara uppmärksam på att man definierar integrationsområdet med hänsyn till integrationsordningen. (a)-uppgiften nedan är ett exempel på då man får olika formulering av integrationsområdet beroende på vilken integrationsordning man väljer, och där "fel" integrationsordning kan ge en integrand som vi inte kan bestämma primitiv funktion till...

Exempel Beräkna dubbelintegralerna

(a) $\displaystyle\iint_D x^2 e^{xy} dx\, dy$ där $D = \{(x, y) : 0 \le x \le y \le 1\}$.

(b) $\displaystyle\iint_D xy(x + y)\, dx\, dy$ där $D = \{$triangeln med hörn i $(0, 0), (1, 1), (3, 0)\}$.

(c) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x + \sqrt{y + 2}}\, dx\, dy$ där $D = [-1, 2]^2$.

(d) $\displaystyle\iint_D |xy|\, dx\, dy$ där $D = \{(x, y) : |x| \le 1$ och $x^2 \le \frac{1}{2}(y + x^2 + 1) \le 1\}$.

Lösning:

(a) D kan skrivas som $\{0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le x\}$ om vi integrerar m.a.p. y först och som $\{y \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1\}$ om vi integrerar m.a.p. x först. Om vi integrerar $x^2 e^{xy}$ m.a.p. x får vi partialintegrera och efter att ha satt in gränserna $x = 1$ och $x = y$ har vi ett uttryck där en term är på formen $\frac{a}{y} e^{by}$ och en annan $\frac{c}{y} e^{dy^2}$ och sådana uttryck är inte lätta att sedan integrera m.a.p. y... Då är det slående hur enkelt allt blir om vi istället väljer att integrera m.a.p. y först:
$\int_0^x x^2 e^{xy} dy = [x^2 \frac{1}{x} e^{xy}]_0^x = x(e^{x^2} - e^0) = xe^{x^2} - x$
och sedan m.a.p. x:
$\int_0^1 (xe^{x^2} - x)\, dx = [\frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2} e^1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^0 + 0 = \frac{e}{2} - 1$.

(b) En omskrivning av integrationsområdet är
$D = \{(x, y) : y \le x \le 3 - 2y \ \wedge\ 0 \le y \le 1\}$ varmed
$\int\int_D xy(x + y)\, dx\, dy = \int_0^1 \underbrace{(\int_y^{3-2y} (x^2 y + xy^2)\, dx)}_{I}\, dy$ där
$I = [\frac{x^3}{3} y + \frac{x^2}{2} y^2]_y^{3-2y} = -y^4 + \frac{11}{2} y^3 - \frac{27}{2} y^2 + 9y$ och därmed $\int\int_D xy(x+y)\, dx\, dy =$
$= \int_0^1 (-y^4 + \frac{11}{2} y^3 - \frac{27}{2} y^2 + 9y)\, dy = [-\frac{1}{5} y^5 + \frac{11}{8} y^4 - \frac{9}{2} y^3 + \frac{9}{2} y^2]_0^1 = \frac{47}{40}$.

(c) $\int \sqrt{x + \sqrt{y + 2}}\, dy \overset{u=\sqrt{y+2}}{=} \int \sqrt{x + u}\, 2u\, du \overset{w=\sqrt{x+u}}{=} \int w\, 2(w^2 - x) 2w\, dw =$
$= 4(\frac{1}{5} w^5 - \frac{x}{3} w^3) = \frac{4}{5}(x + \sqrt{y + 2})^{5/2} - \frac{4x}{3}(x + \sqrt{y + 2})^{3/2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \int_{-1}^2 (\int_{-1}^2 \sqrt{x + \sqrt{y + 2}}\, dy)\, dx = \int_{-1}^2 [\frac{4}{5}(x + \sqrt{y + 2})^{5/2} - \frac{4x}{3}(x + \sqrt{y + 2})^{3/2}]_{-1}^2\, dx =$
$= \underbrace{\int_{-1}^2 \frac{4}{5}(x + 2)^{5/2} - \frac{4x}{3}(x + 2)^{3/2} dx}_{I} - \underbrace{\int_{-1}^2 \frac{4}{5}(x + 1)^{5/2} - \frac{4x}{3}(x + 1)^{3/2} dx}_{II}.$
$\int \frac{4}{5}(x + 2)^{5/2} - \frac{4x}{3}(x + 2)^{3/2} dx \overset{z=\sqrt{x+2}}{=} \int (\frac{4}{5} z^5 - \frac{4}{3}(z^2 - 2) z^3) 2z\, dz =$
$= -\frac{16}{105}(x + 2)^7 + \frac{16}{15}(x + 2)^5 \Rightarrow I = -\frac{16}{105} \cdot 2^7 + \frac{16}{15} \cdot 2^5 + \frac{16}{105} \cdot 1 - \frac{16}{15} \cdot 1 = \frac{416}{105}$.
$\int \frac{4}{5}(x + 1)^{5/2} - \frac{4x}{3}(x + 1)^{3/2} dx \overset{z=\sqrt{x+1}}{=} \int (\frac{4}{5} z^5 - \frac{4}{3}(z^2 - 1) z^3) 2z\, dz =$
$= -\frac{16}{105}(x + 1)^7 + \frac{8}{15}(x + 1)^5 \Rightarrow II = -\frac{16}{105} \cdot 3^{7/2} + \frac{8}{15} \cdot 3^{5/2} + 0 - 0 = \frac{24\sqrt{3}}{35}$.
Alltså är $\int\int_D \sqrt{x + \sqrt{y + 2}}\, dx\, dy = I - II = \frac{416 - 72\sqrt{3}}{105}$.

(d) Först och främst vill man skriva integrationsområdet på en form så att det blir ett villkor på x och ett på y. Detta åstadkoms genom att i

$$x^2 \leq \frac{1}{2}(y + x^2 + 1) \leq 1$$

multiplicera alla led med 2, subtrahera x^2 och 1 varmed integrationsområdet tydligen kan skrivas

$$\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1 \text{ och } x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

Då är $\int\int_D |xy|\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}(\int_{x^2-1}^{1-x^2} |xy|\,dy)\,dx + \int_0^1(\int_{x^2-1}^{1-x^2} |xy|\,dy)\,dx$ och om vi börjar med den senare termen där $0 \leq x \leq 1$ får vi $\int_{x^2-1}^{1-x^2} |xy|\,dy = \int_{x^2-1}^{0} x(-y)\,dy + \int_0^{1-x^2} xy\,dy = [-x\frac{y^2}{2}]_{x^2-1}^{0} + [x\frac{y^2}{2}]_0^{1-x^2} = x^5 - 2x^3 + x$. Därmed är $\int_0^1(\int_{x^2-1}^{1-x^2} |xy|\,dy)\,dx = [\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2]_0^1 = \frac{1}{6}$.
På liknande sätt är i den första termen $-1 \leq x \leq 0$ varmed $\int_{x^2-1}^{1-x^2} |xy|\,dy =$ $= \int_{x^2-1}^{0}(-x)(-y)\,dy + \int_0^{1-x^2}(-x)y\,dy = [x\frac{y^2}{2}]_{x^2-1}^{0} - [x\frac{y^2}{2}]_0^{1-x^2} = -x^5 + 2x^3 - x$.
Därmed är $\int_{-1}^{0}(\int_{x^2-1}^{1-x^2} |xy|\,dy)\,dx = [-\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2]_{-1}^{0} = \frac{1}{6}$.
Sammanlagt är alltså $\int\int_D |xy|\,dx\,dy = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. $\square$

Komihåg **triangelolikheten** för dubbelintegraler: $|\iint_D f(x, y)\,dx\,dy| \leq \iint_D |f(x, y)|\,dx\,dy$.

Variant av **Sats 5** (s. 254–255)
Om f är kontinuerlig på kompakt område Δ
$\{\Delta_k\}_{k=1}^{n}$ indelning av Δ i n ytsegment, vart och ett med arean μ_n
så $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \longrightarrow \iint\limits_{\Delta} f(x, y)\,dx\,dy$

Bevis: (Eftersom lydelsen är lite ändrad ges ett kortfattat bevis analogt med det för Sats 5.) f kontinuerlig på kompakt område $\Delta \Rightarrow f$ likformigt kontinuerlig där, dvs $\forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 : \Big(|(x, y) - (x', y')| \leq \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x', y')| < \frac{\epsilon}{n\mu_n}\Big)$.
Antag nu att $|(\xi_k, \eta_k) - (x, y)| < \delta$ för $(\xi_k, \eta_k), (x, y) \in \Delta_k$ och $k = 1, 2, \ldots, n$.
Då är $|f(\xi_k, \eta_k) - f(x, y)| < \epsilon/(n\mu_n)$ och därmed

$$\Big|\mu_n \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) - \iint\limits_{\Delta} f(x, y)\,dx\,dy\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\underbrace{\mu_n}_{\mu(\Delta_k)} - \sum_{k=1}^{n} \iint_{\Delta_k} f(x, y)\,dx\,dy\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{k=1}^{n} \Big(f(\xi_k, \eta_k) \iint_{\Delta_k} 1\,dx\,dy - \iint_{\Delta_k} f(x, y)\,dx\,dy\Big)\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} \iint_{\Delta_k} (f(\xi_k, \eta_k) - f(x, y))\,dx\,dy\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \iint_{\Delta_k} \underbrace{|f(\xi_k, \eta_k) - f(x, y)|}_{< \epsilon/(n\mu_n)}\,dx\,dy < \frac{\epsilon}{n\mu_n} \sum_{k=1}^{n} \iint_{\Delta_k} 1\,dx\,dy = \frac{\epsilon}{n\mu_n} \sum_{k=1}^{n} \mu_n = \epsilon$$

Mindre segment Δ_k gör att ϵ kan väljas mindre varmed avståndet
$|\mu_n \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) - \int\int_{\Delta} f(x, y)\,dx\,dy| \to 0$ då $n \to \infty$. $\square$