Högskolan i Halmstad

forts. Kapitel 2: Differentialkalkyl för reellvärda funktioner

Stationära punkter

Taylorutveckling kan användas till mycket. I denna kurs ska vi använda det till bestämning av stationära punkters karaktär. För att bestämma stationära punkter till en funktion $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ löser man ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

vilket ger punkter $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$. För att avgöra om dessa är minima eller maxima kan det hända att det räcker att man beräknar

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}_1), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}_1), \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(\boldsymbol{x}_1) \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}_m), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}_m), \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(\boldsymbol{x}_m) \end{cases}$$

Genom att använda dessa värden kan man sedan, m.h.a. Taylorutveckling i flera dimensioner, bilda kvadratiska former som kan avgöra vilken karaktär de stationära punkterna har.

Sats 10 (s. 94) Taylors formel för funktioner av två variabler

Om D_f öppen i $\mathbb{R}^2$
$f \in \mathcal{C}^3(D_f)$
$(a, b) \in D_f$

så $f(a+h, b+k) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}) + (h^2+k^2)^{3/2}\mathcal{O}(h,k)$
där $\mathcal{O}(h,k)$ är begränsad i en omgivning av origo.

Läs beviset!

Eftersom $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ i en stationär punkt, (a, b), för en funktion av två variabler är enligt Taylors formel

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \tfrac{1}{2}Q(h,k) + (h^2+k^2)^{3/2}\mathcal{O}(h,k)$$

där $Q(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2$. Om nu

• $Q(h,k) > 0$, för alla $(h,k) \neq (0,0)$	Q **pos. definit**	$\Rightarrow$	(a,b) **lokalt min**
• $Q(h,k) < 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$	Q **neg. definit**	$\Rightarrow$	(a,b) **lokalt max**
• $Q(h,k)$ både > 0 och < 0 för alla $(h,k) \neq (0,0)$	Q **indefinit**	$\Rightarrow$	(a,b) **sadelpunkt**
• $Q(h,k) \geq 0$ för alla (h,k) eller $Q(h,k) \leq 0$ för alla (h,k) *men* $Q(h,k) = 0$ för något $(h,k) \neq (0,0)$	Q **semidefinit**	$\Rightarrow$	(a,b) **obestämd**

Exempel Bestäm maximum och minimum till

$$f(x,y) = \frac{x^3 - 3x}{1+y^2} \quad \text{då } D_f = \{(x,y) : |x| \le 2, |y| \le 2\}$$

Lösning: Vi har

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2-3}{1+y^2} = \frac{3(1-x)(1+x)}{1+y^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y(x^3-3x)}{(1+y^2)^2} = \frac{2xy(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(1+y^2)^2} = 0 \end{cases}$$

Från $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ får vi $x = \pm 1$ och från $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ fås $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$, $y = 0$. Men $x = 0$ och $x = \pm\sqrt{3}$ satisfierar inte $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ varmed $(x,y) = (-1,0)$ och $(x,y) = (1,0)$ är de enda lösningarna till ekvationssystemet. Vidare är

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{6x}{1+y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2y(3x^2-3)}{(1+y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2(x^3-3x)(1+y^2)^2 - 2y(x^3-3x)2\cdot 2y(1+y^2)}{(1+y^2)^4} = \frac{2(x^3-3x)(1+y^2)(4y-1-y^2)}{(1+y^2)^4} \end{cases}$$

vilket ger

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 4$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = -6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,0) = -4$

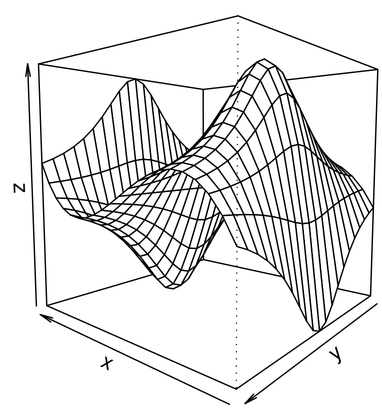
varmed

$(x,y) = (1,0)$: $Q(h,k) = 6h^2 + 4k^2 > 0 \ \Rightarrow\ (1,0)$ lokalt minimum

$(x,y) = (-1,0)$: $Q(h,k) = -6h^2 - 4k^2 < 0 \ \Rightarrow\ (-1,0)$ lokalt maximum

där $f(1,0) = -2$ och $f(-1,0) = 2$.

Kontroll av randen ger $f(-2,y) = \frac{-2}{1+y^2} \ge -2$ då $|y| \le 2$ med likhet då $y = 0$. $f(2,y) = \frac{2}{1+y^2} \le 2$ med likhet då $y = 0$. $f(x,-2) = f(x,2) = = \frac{x^3-3x}{5}$ som har lokalt min i $x = 1$ och lokalt max i $x = -1$. Det visar sig att $f(x,2)$ antar sitt största och minsta värde i ändpunkterna $x = -2$ och $x = 2$ varmed $-\frac{5}{9} \le f(x,-2) = f(x,2) \le \frac{5}{9}$.



Sammanlagt har vi därmed kommit fram till att f antar maximum 2 i $(-1,0)$ och $(2,0)$ och minimum -2 i $(-2,0)$ och $(1,0)$. $\square$

Ibland får man kvadratkomplettera för att komma fram till en positivt definit, negativ definit eller indefinit form av Q (se Exempel 32 och 34 på s. 100 och 104–105).

Differentialer
Antag att $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{\ltimes})$. Den linjära funktionen $df(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definerad av att

$$\Big(df(\boldsymbol{x})\Big)(h_1, \ldots, h_n) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})h_n$$

kallas **differentialen** av f i punkten $\boldsymbol{x}$. I praktiken skriver man dx_k snarare än h_k.

Exempel Skriv differentialen av

$$f(x,y) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})\sqrt{xy},\ x > 0, y > 0$$

enbart m.h.a. $g(x,y) = \sqrt{y} - \frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{x}}$.

Lösning: Vi har
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{xy} + (\sqrt{x} - \sqrt{y})\frac{y}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{2}\sqrt{y}\frac{1}{2}\sqrt{y} - \frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{y}} = g(x,y)$
$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}\sqrt{xy} + (\sqrt{x} - \sqrt{y})\frac{x}{2\sqrt{xy}} = -\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2}\sqrt{x} = -(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{y}}) = -g(y,x)$.
Därmed är $df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = g(x,y)\,dx - g(y,x)\,dy$. $\square$

Läs extensivt om differentialens invarians på s. 116–117.