© 2006 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

forts. Kapitel 2: Differentialkalkyl för reellvärda funktioner

Gradient och riktningsderivata

Gradienten till en differentierbar funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är den n-dimensionella vektorn $\text{grad}\, f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}))$.

Sats 5(*s.* 76)
Om $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ öppen, bågvis sammanhängande (se s. 41)
$f \in \mathcal{C}^1(D_f)$
$\text{grad} f = \mathbf{0}$
så är f konstant på D_f

Läs beviset!

Tidigare har vi definerat partiell derivata, dvs derivata i axelriktningarna. Nu är det dags för derivata i godtycklig riktning, s.k. *riktningsderivata*.

Derivatan av f i punkten $\boldsymbol{a}$ m.a.p. **riktningen** $\boldsymbol{v}$, där $|\boldsymbol{v}| = 1$, är

$$f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \text{grad}\, f(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t}$$

Sats 6 (s. 78)
$f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \text{grad}\, f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}$

Läs beviset!

Exempel
Beräkna derivatan av $f(x, y, z) = z \ln(x + 2y)$ i $(0, \frac{1}{2}, 1)$ längs riktningen $(1, 2, 3)$.

Lösning: $\text{grad}\, f(x, y, z) = \left(\frac{z}{x+2y}, \frac{2z}{x+2y}, \ln(x + 2y)\right)$. Därmed är enligt Sats 6
$f'_{(1,2,3)}(0, \frac{1}{2}, 1) = \left(\frac{1}{0+1}, \frac{2}{0+1}, \ln 1\right) \cdot \frac{(1,2,3)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{1+4+0}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$. □

Sats 7 (s. 79)
$\text{grad}\, f(\boldsymbol{a})$ anger den riktning som f växer snabbast genom punkten $\boldsymbol{a}$. Hur brant detta är ges av $|\text{grad}\, f(\boldsymbol{a})|$.

Sats 8 (s. 82)
Om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är av klass $\mathcal{C}^1$ så är $\text{grad}\, f(a, b)$ normalvektor till tangenten till f:s nivåkurva genom (a, b).
Om $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ är av klass $\mathcal{C}^1$ så är $\text{grad}\, f(a, b, c)$ normalvektor till tangentplanet till f:s nivåyta genom (a, b, c).

Tangentens ekvation: $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0$

Tangentplanets ekvation: $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)(y - b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)(z - c) = 0$

Exempel Bestäm tagentplanet till $\sin(xy) + \cos(yz) = \sqrt{2}$ i punkten $\frac{1}{2}(1, \pi, 1)$.

Lösning: Först kollar vi att punkten $\frac{1}{2}(1, \pi, 1)$ verkligen ligger i planet:
$\sin(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ (ok).
Vidare har vi att $\operatorname{grad} f(x, y, z) = (y\cos(xy), x\cos(xy) - z\sin(yz), -y\sin(yz))$ varmed $\operatorname{grad} f(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}\,,\ \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\,,\ -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}) = (\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, 0, -\frac{\pi}{2\sqrt{2}})$ så tangentplanet är $0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(x - \frac{1}{2}) + 0 \cdot (y - \frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(z - \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(x - z)$. $\square$

Deriverar man, m.a.p. x_j, derivatan av $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ m.a.p. x_k så får man en **andraderivata**: $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\boldsymbol{x})$. Då $j = k$ fås $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\boldsymbol{x})$.

Analogt har man även andra högre ordningens derivator, t.ex. fjärdederivatan m.a.p. först x_ℓ, sedan x_k, sedan x_j och slutligen x_i: $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial}{\partial x_\ell}(\boldsymbol{x})))) = \frac{\partial^4 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_\ell}(\boldsymbol{x})$.

$\mathcal{C}^k(D)$ är klassen (dvs mängden) av funktioner som är

- definierade på den *öppna* definitionsmängden D
- k gånger deriverbara på hela D m.a.p. alla sina variabler
- alla derivator till f av ordning t.o.m. k är *kontinuerliga* på D.

För $f \in \mathcal{C}^2(D)$ gäller att $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}))$ (dvs det har ingen betydelse i vilken ordning man deriverar, m.a.p. x_k först och x_j sedan eller tvärtom).

Exempel Ange den matris som har komponenter $a_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}$[1] i specialfallet med $f = f(x, y, z, w) = 1 + x(1 + y(1 + z(1 + w)))$ där $x, y, z, w \in \mathbb{R}$.

Lösning:
$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + y(1 + z(1 + w))$
$\Rightarrow\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 + z(1 + w),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = y(1 + w),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial w} = yz$
$\frac{\partial f}{\partial y} = x(1 + z(1 + w))$
$\Rightarrow\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x(1 + w),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial w} = xz$
$\frac{\partial f}{\partial z} = xy(1 + w)$
$\Rightarrow\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial w} = xy$
$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$
(Eftersom f uppenbarligen är av klassen $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^4)$ har deriveringsordningen ingen betydelse, så $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, dvs matrisen blir symmetrisk!) Alltså får vi

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 + z(1 + w) & y(1 + w) & yz \\ 1 + z(1 + w) & 0 & x(1 + w) & xz \\ y(1 + w) & x(1 + w) & 0 & xy \\ yz & xz & xy & 0 \end{bmatrix}$$ $\square$

[1] En sådan matris kallas *Hessian* och har speciell betydelse vid optimering.

Variabelbyte i partiella differentialekvationer

Exempel Transformera $(1-x^2)(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (1-y^2)(\frac{\partial f}{\partial y})^2$ genom att substituera $x=\sin(u+v)$ och $y=\cos(u-v)$.

Lösning: Till att börja med ser vi att $(1-x^2)(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (1-y^2)(\frac{\partial f}{\partial y})^2 =$
$= (1-\sin^2(u+v))(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(1-\cos^2(u-v))(\frac{\partial f}{\partial y})^2 = \cos^2(u+v)(\frac{\partial f}{\partial x})^2+\sin^2(u-v)(\frac{\partial f}{\partial y})^2$.
Sedan kollar vi på vad substitutionen gör med de partiella derivatorna:
$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(u+v) + \frac{\partial f}{\partial y}(-\sin(u-v))$
$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(u+v) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(u-v)$
Därmed är $\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} = 2\frac{\partial f}{\partial x}\cos(u+v)$
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\cos(u+v) = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}) \Rightarrow (\frac{\partial f}{\partial x})^2\cos^2(u+v) = \frac{1}{4}(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v})^2 \quad (*)$
och $\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} = 2\frac{\partial f}{\partial y}\sin(u-v) \Rightarrow (\frac{\partial f}{\partial y})^2\sin^2(u-v) = \frac{1}{4}(\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial u})^2 \quad (**)$
så $(1-x^2)(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (1-y^2)(\frac{\partial f}{\partial y})^2 \overset{*,**}{=} \frac{1}{4}(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v})^2 + \frac{1}{4}(\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v})^2 = \frac{1}{2}((\frac{\partial f}{\partial u})^2+(\frac{\partial f}{\partial u})^2)$. $\square$

Exempel Visa att *Laplace-ekvationen* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ är invariant under variabelbytet $x=u^2-v^2+u$, $y=2uv+v$ (dvs att den övergår i samma ekvation m.a.p. u och v i stället för som nu m.a.p. x och y) under förutsättningen att $(u,v)\neq(-\frac{1}{2},0)$.

Lösning: Planen är att först beräkna $\frac{\partial f}{\partial u}$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$, sedan $\frac{\partial f}{\partial v}$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ varigenom man kan bilda $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ och därigenom avgöra om $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(2u+1) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(2v)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial f}{\partial x})\cdot(2u+1) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(2u+1) + \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial f}{\partial y})\cdot(2v) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(2v) =$
$= \Big(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})\underbrace{\frac{\partial x}{\partial u}}_{2u+1} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})\underbrace{\frac{\partial y}{\partial u}}_{2v}\Big)(2u+1) + \frac{\partial f}{\partial x}2 + \Big(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})\underbrace{\frac{\partial x}{\partial u}}_{2u+1} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})\underbrace{\frac{\partial y}{\partial u}}_{2v}\Big)2v + 0 =$
$= \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot(2u+1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot 2v\Big)\cdot(2u+1) + 2\frac{\partial f}{\partial x} + \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot(2u+1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot 2v\Big)\cdot(2v) =$
$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot(2u+1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot 2v(2u+1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot(2v)^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x}$.

$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(-2v) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(2u+1)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial f}{\partial x})\cdot(-2v) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial v}(-2v) + \frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial f}{\partial y})\cdot(2u+1) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial v}(2u+1) =$
$= \Big(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})\underbrace{\frac{\partial x}{\partial v}}_{-2v} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})\underbrace{\frac{\partial y}{\partial v}}_{2u+1}\Big)(-2v) - 2\frac{\partial f}{\partial x} + \Big(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})\underbrace{\frac{\partial x}{\partial v}}_{-2v} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})\underbrace{\frac{\partial y}{\partial v}}_{2u+1}\Big)(2u+1) =$
$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot(-2v)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot(2u+1)(-2v) - 2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot(-2v)(2u+1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2u+1)^2 =$
$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot(2v)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot 2v(2u+1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot(2u+1)^2 - 2\frac{\partial f}{\partial x}$.

Därmed är $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} =$
$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}((2u+1)^2+(2v)^2) + (2-2)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot 2v(2u+1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}((2v)^2+(2u+1)^2) + (2-2)\frac{\partial f}{\partial x} =$
$= ((2u+1)^2+(2v)^2)(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})$. Under förutsättningen att $(u,v)\neq(-\frac{1}{2},0)$ är $(2u+1)^2+(2v)^2\neq 0$ varmed $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. $\square$