Högskolan i Halmstad

Kapitel 3: Differentialkalkyl för vektorvärda funktioner

En kurva $\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ i p dimensioner beskrivs av

$$\boldsymbol{x}(t) \;=\; (x_1(t), \ldots, x_p(t)) \quad \text{där } \alpha \le t \le \beta$$

Man säger att $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ om $x_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \ldots, x_p \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Derivatan till $\boldsymbol{x}(t)$ är $\boldsymbol{x}'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_p'(t))$.

Vektorn $\boldsymbol{x}'(t_0)$ är **tangentvektorn** till kurvan $\boldsymbol{x}(t)$ i punkten $\boldsymbol{x}(t_0)$ och **tangenten** till kurvan $\boldsymbol{x}(t)$ i punkten $\boldsymbol{x}(t_0)$ är

$$\boldsymbol{v}(t) \;=\; \boldsymbol{x}'(t_0) \cdot t + \boldsymbol{x}(t_0) \quad \text{där } t \in \mathbb{R}$$

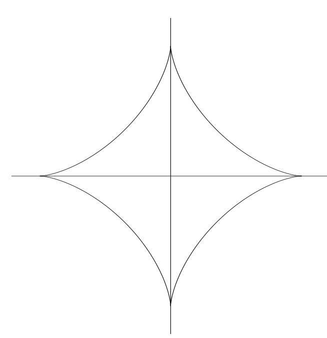
Exempel Antag att en partikels läge som funktion av tiden beskrivs av

$$(x, y) \;=\; (3\cos t + \cos(3t)\;,\;\; 3\sin t - \sin(3t))$$

Bestäm partikelns läge och hastighet vid tidpunkten $t = \frac{\pi}{3}$. Beräkna även $x^{2/3} + y^{2/3}$.

Lösning: Läget vid $t = \frac{\pi}{3}$ är $(x, y) = (3\cos\frac{\pi}{3} + \cos\pi\;,\quad 3\sin\frac{\pi}{3} - \sin\pi) =$ $= (3\frac{1}{2} - 1\;,\;\; 3\frac{\sqrt{3}}{2} - 0) = \frac{1}{2}(1\;,\;\; 3\sqrt{3})$.
Vidare är $(x, y)' = (-3\sin t - 3\sin(3t),\;\; 3\cos t + 3\cos(3t))$ varmed tangentvektorn (som har tolkningen av hastigheten i detta sammahang) är $3(-\sin\frac{\pi}{3} - \sin\pi,$ $\cos\frac{\pi}{3} + \cos\pi) = 3(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,\;\; \frac{1}{2} - 1) = -\frac{3}{2}(\sqrt{3}, 1)$.

vi ser att vi kan förenkla $x = 3\cos t + \cos(3t)$:
$\cos(3t) = \cos t\cos(2t) - \sin t\sin(2t) = \cos t(\cos^2 t - \sin^2 t) - \sin t(2\sin t\cos t) = \cos^3 t - \cos t\sin^2 t - 2\sin^2 t\cos t = \cos^3 t - 3\cos t\sin^2 t = \cos^3 t - 3\cos t(1 - \cos^2 t) = \cos^3 t - 3\cos t + 3\cos^3 t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ varmed $x = 3\cos t + 4\cos^3 t - 3\cos t = 4\cos^3 t$. På liknande sätt är även $y = 3\sin t - \sin(3t) =$
$= 3\sin t - (\sin t\cos(2t) + \cos t\sin(2t)) =$
$= 3\sin t - \sin t(\cos^2 t - \sin^2 t) - \cos t(2\sin t\cos t) =$
$= 3\sin t - \sin t(1 - \sin^2 t) + \sin^3 t - 2\sin t(1 - \sin^2 t) =$
$= 3\sin t - \sin t + \sin^3 t + \sin^3 t - 2\sin t + 2\sin^3 t =$
$= 4\sin^3 t$. Vi har alltså att $(x, y) = 4(\cos^3 t, \sin^3 t)$.
Därmed är $x^{2/3} + y^{2/3} = (4\cos^3 t)^{2/3} + (4\sin^3 t)^{2/3} =$
$= 4^{2/3}(\cos^2 t + \sin^2 t) = 4^{2/3}$.



□

Om en funktionsyta $\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ beskrivs av $\boldsymbol{r}(s, t)$ så spänns tangentplanet i punkten $\boldsymbol{r}(s_0, t_0)$ av vektorerna $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s_0, t_0)$ och $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s_0, t_0)$ och har där normalen $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s_0, t_0) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s_0, t_0)$.

Exempel Bestäm på affin form tangentplanet i punkten $\sqrt{2}(1,1,2)$ till ytan $\begin{cases} x = (1+3\cos u)\cos v \\ y = (1+3\cos u)\sin v \\ z = 3\sin u \end{cases}$.

Lösning: Punkten $(x_0, y_0, z_0) = \sqrt{2}(1,1,2)$ svarar mot parametrarna $(u_0, v_0) = (\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\pi}{4})$, dvs $\sin u_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos u_0 = \frac{1}{3}$, $\cos v_0 = \sin v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vidare är $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (-3\sin u\cos v, -3\sin u \sin v, 3\cos v)$
och $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (-(1+3\cos u)\sin v, (1+3\cos u)\cos v, 0)$ varmed $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u_0, v_0) =$
$= \left(\begin{vmatrix} -3\sin u\sin v & 3\cos u \\ (1+3\cos u)\cos v & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -3\sin u\cos v & 3\cos u \\ -(1+3\cos u)\sin v & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3\sin u\cos v & -3\sin u\sin v \\ -(1+3\cos u)\sin v & (1+3\cos u)\cos v \end{vmatrix} \right)$
$= (-3\cos u(1+3\cos u)\cos v, -3\cos u(1+3\cos u)\sin v, -3\sin u(1+3\cos u)\cos^2 v - 3\sin u(1+3\cos u)\sin^2 v) =$
$= -3(1+3\cos u)(\cos u\cos v, \sin u \sin v, \sin v)$. Därmed är normalen i punkten $\sqrt{2}(1,1,2)$:
$-3(1+3\cos u_0)(\cos u_0 \cos v_0, \sin u_0 \sin v_0, \sin v_0) = -3(1+3\cdot\frac{1}{3})(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) =$
$= -(\sqrt{2}, 4, 3\sqrt{2})$. Slutligen är tangentplanet $\sqrt{2}\,x + 4y + 3\sqrt{2}\,z + d = 0$ där d väljs så att $\sqrt{2}(1,1,2)$ ligger i planet, dvs planet är $\sqrt{2}\,x + 4y + 3\sqrt{2}\,z = 14 + 4\sqrt{2}$. $\square$

Funktionalmatriser
Antag att $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ och $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1$. Då kallas $p \times n$-matrisen av partiella derivator

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f})}{\partial(\boldsymbol{x})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

funktionalmatrisen till $\boldsymbol{f}$.

Om $n = p$, dvs $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ och $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1$, så kallas motsvarande determinant

$$\frac{d(\boldsymbol{f})}{d(\boldsymbol{x})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

funktionaldeterminanten (eller **Jacobianen**). Läs Exempel 7 om funktionalmatriser för övergång till polära koordinater. Jacobianen representerar skalförändringar vid substitutionen vilket kommer att praktiseras vid beräkning av multipelintegraler senare under kursen.

Sats 1 (s. 141)
$$\frac{d(\boldsymbol{f})}{d(\boldsymbol{t})} = \frac{d(\boldsymbol{f})}{d(\boldsymbol{x})} \cdot \frac{d(\boldsymbol{x})}{d(\boldsymbol{t})}$$

Läs Exempel 14.

Sats 2 (s. 144) Inversa funktionssatsen

Om $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1$

$\exists\, \boldsymbol{a} \in D_{\boldsymbol{f}} : \frac{d(\boldsymbol{f})}{d(\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{a}) \neq 0$

så finns omgivningar U öppen i $D_{\boldsymbol{f}}$ och V öppen i $V_{\boldsymbol{f}}$ sådana att

$\boldsymbol{a} \in U$, $f(\boldsymbol{a}) \in V$, $\boldsymbol{f} : U \to V$ bijektiv med inversen $\boldsymbol{f}^{-1} \in \mathcal{C}^1$

(Observera att en funktion kan vara bijektiv även om dess funktionaldeterminant är lika med 0, se kommentar i boken på s. 145.)

Implicita funktioner

Istället för att ange funktioner explicit genom $y = f(x)$ kan man uttrycka ett funktionssamband implicit, t.ex. $f(x, y) = c$. Ibland är det mindre uppenbart huruvida sådana uttryck verkligen definierar y som en funktion av x eftersom funktionen ska vara entydigt definierad för varje element x ur definitionsmängden. Fallet $xy = 1$ ger en funktion y som är definierad på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, medan $x^2 + y^2 = 1$ inte kan representeras av en enda funktion. Ibland kan det vara svårt att avgöra, som i fallet $y^5 + xy - 4 = 0$ t.ex.

Exempel Finns det en reellvärd funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ som satisfierar $y = f(x)$ med $y^4 - 3x(y^2 - 1) + 2x^2 = 9$?

Lösning: Låt $w = y^2$. Då är $w^2 - 3xw + 3x + 2x^2 - 9 = 0$

$$\begin{aligned} w &= \tfrac{3}{2}x \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}x^2 - 3x - 2x^2 + 9} \\ &= \tfrac{3}{2}x \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 x^2 - 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 3x + 3^2} \\ &= \tfrac{3}{2}x \pm (\tfrac{x}{2} - 3) \\ &= \begin{cases} 2x - 3 \\ x + 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Men eftersom $w = y^2$ så är $y = \begin{cases} \pm\sqrt{2x-3} \\ \pm\sqrt{x+3} \end{cases}$ och f skulle vara reellvärd på hela $\mathbb{R}^+$. Därmed är endast $y = f(x) = -\sqrt{x+3}$ och $y = f(x) = \sqrt{x+3}$ reellvärda funktioner för alla positiva x. $\square$

Sats 3 (s. 148) Implicita funktionssatsen

Om $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

$(a, b) \in \{(x, y) : F(x, y) = C\}$

$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$

så finns öppen $U \ni (a, b)$ sådan att $F(x, y) = C$ på U definierar $f(x) := y$ och

$f'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) / \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$