© 2006 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

Kapitel 2: Differentialkalkyl för reellvärda funktioner

Partiella derivator
På samma sätt som derivatan av en funktion av en variabel kan tolkas som riktningskoefficienten till tangenten till funktionskurvan, kan den partiella derivatan m.a.p. en viss variabel x tolkas som riktningskoefficienten till tangenten i en riktning som är parallell med x-axeln.

Antag att $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Den **partiella derivatan** av $f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ m.a.p. x_k, där $1 \leq k \leq n$, är (då gränsvärdet existerar)

$$\begin{aligned} f'_{x_k}(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) &= \tfrac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{h} \end{aligned}$$

I praktiken innebär detta att man betraktar en funktion av variablerna $x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n$ som en funktion av den enda variabeln x_k och de övriga variablerna $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ som konstanter. Låt oss se några exempel.

Exempel
Beräkna förstaderivatan m.a.p. de olika variablerna beträffande funktionerna
(a) $f(x, y) = x\sqrt{xy}$
(b) $g(x, y, z) = (x^2 - 2xz + xy - 2yz)\ln(x + y)$
(c) $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{x_1 + x_2^2 + \ldots + x_n^n}$

Lösning:

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x\sqrt{xy}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Betrakta } y \text{ som} \\ \text{en konstant} \end{array} \right\} = 1 \cdot \sqrt{xy} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y = \frac{3}{2}\sqrt{xy}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x\sqrt{xy}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Betrakta } x \text{ som} \\ \text{en konstant} \end{array} \right\} = x \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot x = x\sqrt{\frac{x}{y}}$

(b) $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}((x^2 - 2xz + xy - 2yz)\ln(x + y)) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Betrakta } y \text{ och } z \\ \text{som konstanter} \end{array} \right\} =$
$= (2x - 2z + y)\ln(x + y) + \underbrace{(x^2 - 2xz + xy - 2yz)}_{=(x+y)(x-2z)} \cdot \frac{1}{x+y} =$
$= (2x - 2z + y)\ln(x + y) + x - 2z$

$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}((x^2 - 2xz + xy - 2yz)\ln(x + y)) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Betrakta } x \text{ och } z \\ \text{som konstanter} \end{array} \right\} =$
$= (x - 2z)\ln(x + y) + x - 2z = (x - 2z)(1 + \ln(x + y))$

$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}((x^2 - 2xz + xy - 2yz)\ln(x + y)) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Betrakta } x \text{ och } z \\ \text{som konstanter} \end{array} \right\} =$
$= (-2x - 2y)\ln(x + y) = -2(x + y)\ln(x + y)$

(c) $\frac{\partial\phi}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 + x_2^2 + \ldots + x_n^n) \cdot e^{x_1+x_2^2+\ldots+x_n^n} = 1 \cdot e^{x_1+x_2^2+\ldots+x_n^n}$
$\frac{\partial\phi}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 + x_2^2 + \ldots + x_n^n) \cdot e^{x_1+x_2^2+\ldots+x_n^n} = 2x_2 \cdot e^{x_1+x_2^2+\ldots+x_n^n}$
$\vdots$
$\frac{\partial\phi}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n}(x_1 + x_2^2 + \ldots + x_n^n) \cdot e^{x_1+x_2^2+\ldots+x_n^n} = nx^{n-1} \cdot e^{x_1+x_2^2+\ldots+x_n^n}$ $\square$

Observera att $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) = 0$ inte implicerar att $f(\boldsymbol{x})$ är konstant (s. 50–51). Läs även Exempel 6 på s. 51 om en funktion som är *partiellt deriverbar i origo trots att den inte är kontinuerlig där.* Detta beror på att den är kontinuerlig och deriverbar i koordinataxlarnas riktning men diskontinuerlig (och ej deriverbar) i t.ex. den riktning som är diagonal mellan koordinataxlarna (dvs $f(t,t) = \frac{1}{2}$ för alla $t \neq 0$ men $f(0,0) = 0$). Detta exempel är en motivation för att något raffinera deriverbarhetsbegreppet.

Antag att $\boldsymbol{a}$ är en inre punkt i definitionsmängden till funktionen f. Då är f *differentierbar* i $\boldsymbol{a}$ om det finns $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ och en fuktion $\rho(\boldsymbol{h})$ så att $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{h}) = A_1 h_1 + \ldots, A_n h_h + |\boldsymbol{h}|\rho(\boldsymbol{h})$ där $\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \rho(\boldsymbol{h}) = 0$. Detta innebär att f är kontinuerlig och "mjuk" i alla riktningar $\boldsymbol{h}$ från $\boldsymbol{a}$.

[Differentierbar $\Rightarrow$ kontinuerlig.

Derivatan av en funktion i en variabel i en viss punkt, a, kan tolkas som riktningskoefficienten för tangent-linjen till funktionskurvan i a. På samma sätt kan de partiella derivatorna av en funktion av flera variabler i en punkt, $\boldsymbol{a}$, tolkas som riktnigskoefficienter för de linjer som bestämmer det plan som tangerar funktionsytan i $\boldsymbol{a}$ (se figuren överst på s. 55).

Exempel
Bestäm tangentplanet till $f(x,y) = \sqrt{3 - 2x^2 - y^2}$ i punkten $(x,y) = (\frac{1}{2}, -1)$.

Lösning:
Enligt differentierbarhetsdefinitionen i specialfallet med 2 variabler har vi $f(x,y) =$
$= f(\frac{1}{2}, -1) + \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{1}{2}, -1)(x - \frac{1}{2}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{1}{2}, -1)(y+1) + \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 + (y+1)^2}\,\rho(x - \frac{1}{2}, y+1)$
varmed tangentplanet är

$$
\begin{aligned}
z &= \sqrt{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\,(x - \frac{1}{2}) + \sqrt{\frac{2}{3}}\,(y+1) \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\,(3 - 4x + 3 + 2y + 2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}(8 - 4x + 2y) \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}\,(4 - 2x + y)
\end{aligned}
$$

$\square$

$\mathcal{C}^1(D)$ är klassen (dvs mängden) av funktioner som är

- definierade på den *öppna* definitionsmängden D
- deriverbara på hela D m.a.p. alla sina variabler
- alla derivator till f är *kontinuerliga* på D

Det är på den sista punkten differentierbarheten spricker i fallet med funktionen i Exempel 6 på s. 51. Verifiera det!

Sats 3 (s. 56)
Varje funktion av klassen $\mathcal{C}^1$ är differentierbar.

Läs beviset!

Kedjeregeln
Kedjeregeln för *en variabel* ger att om f är en *en*variabel reellvärd funktion och g är en flervariabel reellvärd funktion så är den partiella derivatan

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(g(\boldsymbol{x})) = \frac{df}{dg}(g(\boldsymbol{x})) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})$$

Exempel Beräkna förstaderivatan m.a.p. de olika variablerna beträffande funktionen $g(x,y,z) = x^{y^z}$ där $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Lösning: Först och främst har vi att $x^{y^z} = e^{\ln(x^{y^z})} = e^{y^z \ln x}$ och eftersom $\frac{d}{dx}(e^{h(x)}) =$
$= h'(x)e^{h(x)}$ är $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(x^{y^z}) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{y^z \ln x}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Betrakta } y \text{ och } z \\ \text{som konstanter} \end{array} \right\} =$
$= \frac{\partial}{\partial x}(y^z \ln x) \cdot e^{y^z \ln x} = \frac{y^z}{x} \cdot x^{y^z}$
$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{y^z \ln x}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Betrakta } x \text{ och } z \\ \text{som konstanter} \end{array} \right\} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{y^z \ln x}) \cdot e^{y^z \ln x} = (\ln x) z y^{z-1} x^{y^z}$
Vi kan till yttermera visso skriva x^{y^z} som $e^{e^{z \ln y} \ln x}$ varmed $\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}(e^{e^{z \ln y} \ln x}) =$
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Betrakta } x \text{ och } y \\ \text{som konstanter} \end{array} \right\} = \frac{\partial}{\partial z}(e^{z \ln y} \ln x) \cdot e^{e^{z \ln y} \ln x} = (\ln x)(\ln y) e^{z \ln y} x^{y^z} = (\ln x)(\ln y) y^z x^{y^z}$
$\square$

Sats 4 (s. 65) *Kedjeregeln för flervariabla funktioner*
Antag att $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $f(\boldsymbol{x}$ är differentierbar, och att $\boldsymbol{g}(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$ är en vektorvärd funktion med vektorkomponenterna $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ som är deriverbara för $t \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Då är den sammansatta funktionen $f(\boldsymbol{g}(t))$ också deriverbar på (a,b), med derivatan
$\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{g}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{g}(t)) \cdot \frac{dg_1}{dt}(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{g}(t)) \cdot \frac{dg_n}{dt}(t)$

(Se även det mer kompakta skrivsättet i (21) på s. 65.)

Den *allmänna kedjeregeln* fås om man låter även argumentet t till funktionen $\boldsymbol{g}$) vara flerdimensionellt, dvs $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_m)$. Derivatan av $f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}))$ m.a.p. t_j, där $1 \le j \le m$, blir då $\frac{\partial}{\partial t_j} f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial t_j}(\boldsymbol{t}) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})) \cdot \frac{\partial g_n}{\partial t_j}(\boldsymbol{t})$.

Exempel Antag att $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ och att $x=e^u\cos v$, $y=e^u\sin v$.
Visa att $(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2=e^{-2u}\Big((\frac{\partial f}{\partial u})^2+(\frac{\partial f}{\partial v})^2\Big)$.

Lösning: $\frac{\partial x}{\partial u}=e^u\cos v$, $\frac{\partial y}{\partial u}=e^u\sin v$, $\frac{\partial x}{\partial v}=-e^u\sin v$, $\frac{\partial y}{\partial v}=e^u\cos v$. Därmed är $\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}e^u\cos v+\frac{\partial f}{\partial y}e^u\sin v$ och $\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}(-e^u\sin v)+\frac{\partial f}{\partial y}e^u\cos v$. Så högerledet blir $e^{-2u}\Big((\frac{\partial f}{\partial u})^2+(\frac{\partial f}{\partial v})^2\Big)=$
$=e^{-2u}\Big((\frac{\partial f}{\partial x}e^u\cos v+\frac{\partial f}{\partial y}e^u\sin v)^2+(-\frac{\partial f}{\partial x}e^u\sin v+\frac{\partial f}{\partial y}e^u\cos v)^2\Big)=$
$=e^{-2u}\Big(e^{2u}\Big((\frac{\partial f}{\partial x})^2\cos^2 v+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\sin^2 v+2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\cos v\sin v\Big)+e^{2u}\Big((\frac{\partial f}{\partial x})^2\sin^2 v+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\cos^2 v-2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\sin v\cos v\Big)\Big)$
$=(\frac{\partial f}{\partial x})^2(\cos^2 v+\sin^2 v)+(\frac{\partial f}{\partial y})^2(\sin^2 v+\cos^2 v)=(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2$. □

Exempel Bestäm $f(x,y)$ om vi har att

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=(3x^4-3x^2y^2+2x+y)e^{x^3-\frac{3}{2}x^2y}\\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{2}(2-3x^3-3x^2y)e^{x^3-\frac{3}{2}x^2y}\\ f(1,1)=3e^{1/3}\end{cases}$$

Lösning: För att integrera $\frac{\partial f}{\partial x}$ m.a.p. x beräknar vi först den inre derivatan av $e^{x^3-\frac{3}{2}x^2y}$, dvs $\frac{\partial}{\partial x}(x^3-\frac{3}{2}x^2y)=3x^2-3xy=3x(x-y)$. Vidare är $\underbrace{3x^4-3x^2y^2}_{3(x^4-x^2y^2)}+2x+y=3(x^2+xy)(x^2-xy)+2x+y=3x(x-y)(x^2+xy)+2x+y$ där man känner igen $3x(x-y)$ som inre derivatan av $e^{x^3-\frac{3}{2}x^2y}$ och $2x+y$ som $\frac{\partial}{\partial x}(x^2+xy)$.
Därmed är

$$(3x^4-3x^2y^2+2x+y)e^{x^3-\frac{3}{2}x^2y}$$

derivatan

$$3x(x-y)e^{x^3-\frac{3}{2}x^2y}(x^2+xy)+e^{x^3-\frac{3}{2}x^2y}(2x+y)$$

m.a.p. x av produkten

$$e^{x^3-\frac{3}{2}x^2y}(x^2+xy)$$

varmed

$$f(x,y)=e^{x^3-\frac{3}{2}x^2y}(x^2+xy)+C(y)$$

Inre derivatan av $e^{x^3-\frac{3}{2}x^2y}$ m.a.p. y är $\frac{\partial}{\partial y}(x^3-\frac{3}{2}x^2y)=-\frac{3}{2}x^2$. Vidare: $\frac{x}{2}(2-3x^3-3x^2y)=x-\frac{3}{2}x^2(x^2+xy)$ där den första termen, x, är derivatan av x^2+xy m.a.p. y. Därmed är $\frac{x}{2}(2-3x^3-3x^2y)e^{x^3-\frac{3}{2}x^2y}$ derivatan av m.a.p. y $-\frac{3}{2}x^2e^{x^3-\frac{3}{2}x^2y}(x^2+xy)+xe^{x^3-\frac{3}{2}x^2y}$ av produkten ${}^{x^3-\frac{3}{2}x^2y}(x^2+xy)$ varmed $f(x,y)=e^{x^3-\frac{3}{2}x^2y}(x^2+xy)+D(x)$.

Eftersom $C'(y)=D'(x)=0$ har vi att endast en additiv konstant, E, kan komma ifråga. Villkoret $f(1,1)=3e^{1/3}$ ger nu att $3e^{1/3}=e^{1-\frac{2}{3}}(1+1)+E\;\Rightarrow\;E=e^{1/3}$ varmed slutligen

$$f(x,y)=e^{x^3-\frac{3}{2}x^2y}(x^2+xy)+e^{1/3}.$$

□