Högskolan i Halmstad

Flervariabelanalys

Kapitel 1: Funktioner av flera variabler

I kursen Envariabelanalys introducerades funktionsbegreppet $f : D_f \to V_f$ där f är en **funktion** (eller avbildning), dvs en regel som talar om hur varje tal ur en definitionsmängd, D_f, tillordnas ett tal i en värdemängd, V_f. Så är det även nu men vi låter definitionsmängden bestå av multiplar av tal och talar då om funktioner av flera varabler.

T.ex. om $D_f = \mathbb{R}^2$ skrivs funktionen vanligen $f(\boldsymbol{x})$ eller mer informativt $f(x, y)$ eller $f(x_1, x_2)$, och om $D_f = \mathbb{R}^3$ skrivs oftast funktionen antingen $f(x, y, z)$ eller $f(x_1, x_2, x_3)$, och om $D_f = \mathbb{R}^n$ skrivs funktionen $f(x_1, \ldots, x_n)$. Om värdemängden är endimensionell kallas funktionen **reellvärd** och om värdemängden är flerdimensionell kallas funktionen **vektorvärd**.

Från Linjär algebra vet vi att

- $\mathbb{R}^n$ är mängden $\{(x_1, \ldots, x_n) : x_k \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, n\}$ av n-tiplar av reella tal
- längden (beloppet) av en vektor $\boldsymbol{x}$ är $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$
- skalärprodukten mellan vektorer $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ är $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (x_1, \ldots, x_2) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$.

Vidare har vi

Sats 1 (s. 7) *Cauchy-Schwarz olikhet*
$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|$

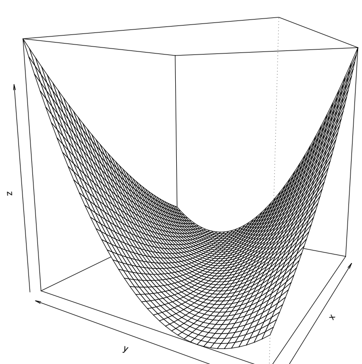
och

Sats 2 (s. 7–8) *Triangelolikheten*
$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$

Läs bevisen!

Exempel Ange maximal definitionsmängd och värdemängd för funktionen $f(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2$.

Lösning: Vi har att $f(x, y) = (x - 2y)^2$ vilket innebär att tvärsnittet av ytan är en "vanlig" x^2-kurva i xz-planet (dvs då $y = 0$), en x^2-kurva förskjuten 2 enheter positivt i x-led då $y = 1$ (ty då är ju $z = (x - 2)^2$), osv. Eftersom uttrycket $(x - 2y)^2$ är definierat för alla $x, y \in \mathbb{R}$ är maximal definitionsmängd $\mathbb{R}^2$ och eftersom $z = (x - 2y)^2$ är en jämn kvadrat är maximal värdemängd $[0, \infty)$.

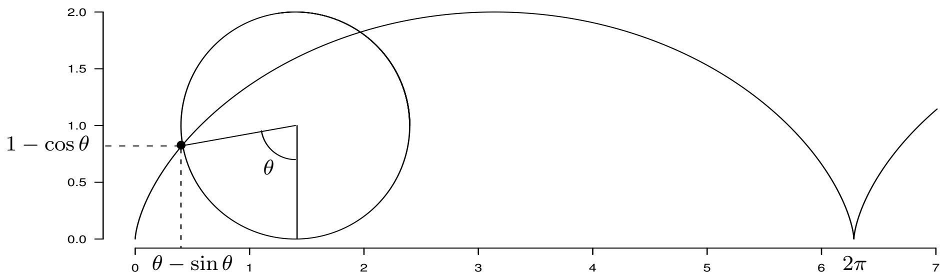


□

Läs om nivåkurvor och nivåytor.

Vektorvärda funktioner
Kurvor på parameterform är exempel på vektorvärda funktioner $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ (se *Analys i en variabel* av Persson & Böiers).

Exempel Betrakta funktionen $\boldsymbol{f}(\theta) = (\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta)$ där $\theta > 0$. Vi har att $\boldsymbol{f}(0) = (0, 0)$ så funktionen "börjar" i origo. Då θ ökar kommer x-koordinaten att öka medan y-koordinaten "harmoniskt guppar upp och ned" varmed vi får *cykloiden*, den kurva som anger hur en fix punkt på ett rullande hjul rör sig.



□

Mängder
Lär **inre punkt**, (**yttre punkt**), **randpunkt**.
En mängd är **sluten** om den innehåller sin rand, dvs

$$M \text{ \textbf{sluten} } \overset{def.}{\Leftrightarrow} \partial M \subseteq M$$

$\mathbb{R}^n$ är både öppen och sluten. Det är även dess komplement $\emptyset$. Exempel på en öppen och obegränsad mängd är $\mathbb{R}$, exempel på öppen och begränsad är ett öppet klot $\{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x}| < r\}$ (se s. 10), exempel på sluten och obegränsad är $\mathbb{R}$ och exempel på sluten och begränsad är ett slutet klot $\{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x}| \leq r\}$.

Begreppet kompakt är viktigt för senare satser om kontinuerliga funktioner, t.ex. att en kontinuerlig funktion på ett kompakt område garanterat har ett största och ett minsta värde där (se Sats 4, s. 41) vilket är värdefull kunskap för optimering senare i kursen.

Lär andragradsytorna (s. 30): Ellipsoider $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, en- och tvåmantlade hyperboloider $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$, elliptiska och hyperboliska paraboloider $z = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2}$, koner $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, elliptiska och hyperboliska cylindrar $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ och paraboliska cylindrar $x = \frac{y^2}{b^2}$.

Koordinatbyten
Exempel Betrakta sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Genom koordinatbytet

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

ser vi att detta reduceras till

$$\begin{aligned} 1 &= r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + r^2 \cos\theta \\ &= r^2(\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\theta) \\ &= r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= r^2 \end{aligned}$$

dvs $|r| = 1$. $\square$

Gränsvärden
Antag att $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ och att $\boldsymbol{a} \in D_f \cup \partial D_f$. $\boldsymbol{f}$ har **gränsvärdet** $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$ om

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : (|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta \ \Rightarrow\ |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}| < \epsilon)$$

vilket skrivs $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$.

Definitionen av gränsvärde med ϵ och δ på detta viset kan tolkas som att “hur nära $\boldsymbol{b}$ vi än vill vara (med värden från $\boldsymbol{f}$) så kan vi hitta $\boldsymbol{x}$ som ligger så nära $\boldsymbol{a}$ att därmed $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ligger närmare”.

(Läs Exempel 29, s. 41).

Kontinuitet
$\boldsymbol{f}$ är **kontinuerlig** på D_f om $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ för alla $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} \in D_f$.

Sats 4 (s. 41)
Om $\boldsymbol{f}$ är kontinuerlig på kompakt definitionsmängd så antar $\boldsymbol{f}$ sitt största resp. sitt minsta värde där.

$\boldsymbol{f}$ är **likformigt kontinuerlig** på D_f om
$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : (|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < \delta \ \Rightarrow\ |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| < \epsilon \text{ för } \underline{\text{alla}}\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D_{\boldsymbol{f}})$$

Naturligtvis är en likformigt kontinuerlig funktion kontinuerlig på vanligt sätt. Men när är en kontinuerlig funktion även likformigt kontinuerlig, och när är den det inte? Detta med likformig kontinuitet är visserligen inte det viktigaste i den här kursen men eftersom det brukar upplevas som krångligt vill jag nu ge ett (förhoppningsvis) belysande exempel på en funktion som är kontinuerlig men inte likformigt kontinuerlig och försöker förklara varför det är så.

Exempel Låt $f(x) = \frac{1}{x}$ med definitionsmängd $D_f = (0, \infty)$. Är f kontinuerlig? Är f likformigt kontinuerlig?

Lösning[1]: Låt oss ta ett tal godtyckligt[2] ur D_f, t.ex. $a = 0.1$, och ett litet ϵ, säg $\epsilon = 0.01$. Då ska vi kunna hitta ett δ sådant att om bara x ligger på ett avstånd mindre än δ från a, så ska $f(x) = \frac{1}{x}$ vara närmare än $\epsilon = 0.01$ ifrån $f(a) = \frac{1}{0.1} = 10$.

Låt oss nu välja $\delta = 0.00001$. Då är $|x - a| = |x - 0.1| < 0.00001$, dvs $x \in (0.09999, 0.10001)$. Därmed är $f(0.09999) = \frac{1}{0.09999}$ och $f(0.10001) = \frac{1}{0.10001}$ varmed $|f(x) - f(a)| \leq \frac{1}{0.09999} - 10 = 0.00100010001\ldots < 0.01 = \epsilon$. På samma sätt kan vi, hur litet ϵ vi än får oss givet och hur nära 0 vi än är i x-led, välja ett δ så litet att villkoret $|x - a| < \delta$ garanterar att $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Därför är f kontinuerlig på $(0, \infty)$.

När det gäller likformig kontinuitet däremot skulle vi för ett givet litet ϵ behöva hitta δ så litet att differensen i y-led blev mindre än ϵ *för **alla** val av x och y* på defintionsmängden $(0, \infty)$! Låt $\epsilon = 0.01$ (som förut). Nu kan vi dock inte nöja oss med att $|f(x) - f(a)| < 0.01$ för alla x på ett δ avstånd från ett fixt a utan nu måste vi åstadkomma att $|f(x) - f(y)| < 0.01$ för *alla* x och y inom δ avstånd från varandra! Och faktum är att hur litet vi än väljer δ så kan vi alltid få $|f(x) - f(y)|$ hur stort som helst om vi bara tar x och y tillräckligt nära 0. Då kan vi välja $\delta = 0.00001$. För $x = 0.00001$ och $y = 0.000001$ gäller då att $|x - y| = 0.000009 < 0.00001$ men $|f(x) - f(y)| = |\frac{1}{0.00001} - \frac{1}{0.000001}| = 900\,000 > 0.01 = \epsilon$. Därmed är f inte likformigt kontinuerlig på $(0, \infty)$. $\square$

I allmänhet kan det ibland vara ganska svårt att avgöra om en funktion är likformigt kontinuerlig. Därför kan det vara betryggande att känna till följande sats.

Sats 5 (s. 41)
Om $\boldsymbol{f}$ är kontinuerlig på kompakt definitionsmängd så är $\boldsymbol{f}$ likformigt kontinuerlig där.

[1]Alternativt kan man utnyttja att i detta fall är $|f(x) - f(y)| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{|x-y|}{|x||y|} < \epsilon$, och konstatera att för $0 < x < a$ är i så fall $|x - a| < \epsilon a^2$. Givet $\epsilon > 0$ måste då $0 < \delta \leq \epsilon a^2$, vilket illustrerar att valet av δ beror på a vilket är ok för kontinuiteten men inte ok för den likformiga kontinuiteten.

[2]Godtyckligt i detta sammanhang innebär att man ska kunna välja vilket annat tal som helst och resonemanget ska bli analogt