Lösningar till Tentamen i Flervariabelanalys, 5p

Distanskurs
7 januari, 2007 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844)

1. Formulera och bevisa Cauchy Schwarz olikhet. (3p)

   Lösning: (Se s. 8, *Analys i flera variabler* av Persson och Böiers.) $\square$

2. Låt $F(D) = \iint_D \frac{dx\,dy}{(2x+y)^{3/2}}$. Beräkna

   (a) $F(D)$ om $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2, 3 \le y \le 4\}$. (3p)

   (b) $F(D)$ om D är det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = x^2$, $y = x$ och av $x \le 1$. (Tips: Derivera $\ln|x + \sqrt{x^2-1}|$.) (3p)

   (c) $\lim_{n\to\infty} F(D)$ om $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 1 \le y \le n\}$. (4p)

   Lösning:

   (a) $\iint_D \frac{dx\,dy}{(2x+y)^{3/2}} = \int_1^2 (\int_3^4 (2x+y)^{-3/2} dy)\,dx = \int_1^2 [-2(2x+y)^{-1/2}]_3^4\,dx =$
   $= -2\int_1^2 ((2x+4)^{-1/2} - (2x+3)^{-1/2})\,dx = -2[(2x+4)^{1/2} - (2x+3)^{1/2}]_1^2 =$
   $= -2((2\cdot 2+4)^{1/2} - (2\cdot 2+3)^{1/2} - (2\cdot 1+4)^{1/2} + (2\cdot 1+3)^{1/2}) =$
   $= -2(\sqrt{8} - \sqrt{7} - \sqrt{6} + \sqrt{5}) = 2(\sqrt{6} + \sqrt{7} - \sqrt{5} - \sqrt{8})$.

   (b) $\iint_D \frac{dx\,dy}{(2x+y)^{3/2}} = \int_0^1 (\int_{x^2}^x (2x+y)^{-3/2} dy)\,dx = \int_0^1 [-2(2x+y)^{-1/2}]_{x^2}^x\,dx =$
   $= -2\int_0^1 ((2x+x)^{-1/2} - (2x+x^2)^{-1/2})\,dx = 2\Big(\underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+x^2}}}_{I} - \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x}}}_{II}\Big)$. Här är
   $II = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 x^{-1/2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}[2x^{1/2}]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ och $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}} = \int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$.
   Enligt tipset deriverar vi $\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$: $\frac{d}{dx}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} =$
   $\frac{(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}})(1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}})}{x^2-(x^2-1)} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Av detta drar vi slutsatsen att $I = \int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = [\ln|x+\sqrt{u^2-1}|]_1^2 = \ln(2+\sqrt{3})$. Alltså är $\iint_D \frac{dx\,dy}{(2x+y)^{3/2}} =$
   $2(I - II) = 2(\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{2}{\sqrt{3}})$.

   (c) $\iint_D \frac{dx\,dy}{(2x+y)^{3/2}} = \int_1^n (\int_0^1 (2x+y)^{-3/2}dx)\,dy = -\int_1^n (\frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{\sqrt{2x}})\,dx =$
   $= 2(-\sqrt{2+n} - \sqrt{n} + \sqrt{3} - 1) = 2(\frac{n-(2+n)}{\sqrt{n}+\sqrt{2+n}} + \sqrt{3} - 1) \to 2(\sqrt{3}-1)$ då $n \to \infty$. $\square$

3. Bestäm samtliga extrempunkter och avgör deras karaktär för funktionen $f(x, y) = 3x^3 - y^2 + 6xy - 72x$. (3p)

Lösning: $\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 + 6y - 72 = 0$ (1) och $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 6x = 0$ (2). (2) $\Rightarrow y = 3x \overset{(1)}{\Rightarrow} 3x^2 + 2 \cdot 3x - 24 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -4 \Rightarrow y_1 = 6, y_2 = -12$. Alltså har vi de två punkterna $(2, 6)$ och $(-4, -12)$ som kan vara möjliga extrempunkter. För att avgöra deras karaktär berärknar vi andraderivatorna och deras värden i punkterna $(2, 6)$ och $(-4, -12)$. Därmed avgör vi av vilket slag den kvadratiska formen $Q(h, k)$ är. Vi får: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$ vilket i punkterna innebär:

$(2, 6)$ $Q(h, k) = 36h^2 + 12hk - 2k^2 = (6h + k)^2 - 3k^2$ vilket är indefinit form varmed punkten $(2, 6)$ är en sadelpunkt.

$(-4, -12)$ $Q(h, k) = -72h^2 + 12hk - 2k^2 = -12(6h^2 - 2hk + \frac{1}{6}k^2 - \frac{1}{6}k^2) - 2k^2 = -12(\sqrt{6}h - \frac{1}{\sqrt{6}}k)^2$ vilket är neg.def. form varmed punkten $(-4, -12)$ är ett lokalt maximum. $\square$

4. Bestäm $f(x, y)$ så att $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = xe^{x^2 + y/2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + \frac{1}{4}e^{x^2 + y/2}$, $f(0, 0) = -1$, $f(1, -2) = -8$ och $f(2, -6) = e$. (3p)

Lösning: Integrering av $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ först m.a.p. x och sedan m.a.p. y ger $\frac{\partial f}{\partial y} = \int xe^{x^2 + y/2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2 + y/2} + Ay + B$ och $f = \int (\frac{1}{2}e^{x^2 + y/2} + Ay + B)\, dy = \frac{1}{2} \cdot 2e^{x^2 + y/2} + A\frac{y^2}{2} + By + Cx + D$. Derivering av $\frac{\partial f}{\partial y}$ en gång m.a.p. y ger att $2 + \frac{1}{4}e^{x^2 + y/2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{4}e^{x^2 + y/2} + A$ varmed $A = 2$ så $f(x, y) = e^{x^2 + y/2} + y^2 + By + Cx + D$. Därmed har vi ekvationssystemet

$$
\begin{array}{rclcll}
-1 & = & f(0,0) & = & e^0 + D = 1 + D & (1) \\
-8 & = & f(1,-2) & = & e^{1-2/2} + 4 - 2B + C + D = 3 - 2B + C & (2) \\
e & = & f(2,-6) & = & e^{4-6/2} + 36 - 6B + 2C + D = e + 36 - 6B + 2C + D & (3)
\end{array}
$$

(1) $\Rightarrow D = -2 \overset{(2)}{\Rightarrow} -2B + C = -11\,(*)$. (3) $\Rightarrow 34 - 6B + 2C = 0\,(**)$. $(*) + (**)$: $B = 6 \Rightarrow C = 1$. Alltså är $f(x, y) = e^{x^2 + y/2} + y^2 + 6y + x - 2$. $\square$

5. Visa att $\displaystyle\iint_{x^2+y^2 \le \pi^2} \ln(2 + \sin x + \cos y)\, dx\, dy \ \le\ 2\pi^3 \ln 2$. (3p)

Lösning: Enligt definitionen av Riemannintegralen som ett gränsvärde av Riemannsummor (se s. 227–237, *Analys i flera variabler* av Persson och Böiers) är $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy \le A(D) \cdot \sup_{(x,y) \in D} f(x, y)$. Eftersom $\sup_{x^2+y^2 \le \pi^2} \ln(2 + \sin x + \cos y) = \ln(2+1+1) = 2 \ln 2$ och $A(D) = \{\text{Arean av en cirkel med radien } \pi\} = \pi \cdot \pi^2 = \pi^3$ har vi att $\iint_{x^2+y^2 \le \pi^2} \ln(2 + \sin x + \cos y)\, dx\, dy \ \le\ \pi^3 2 \ln 2$. $\square$

6. Bevisa att $\Delta f(s,t) = \frac{1}{2}\Delta f(u,v)$ vid substitutionen $s = u+v$, $t = u-v$ där Δ är Laplaceoperatorn som definieras av $\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. (4p)

Lösning: Vi ska alltså visa att

$$\begin{cases} s = u+v \\ t = u-v \end{cases} \implies \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$

Subsitutionen är ekvivalent med $u = \frac{1}{2}(s+t)$, $v = \frac{1}{2}(s-t)$. Enligt kedjeregeln är $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial v}$ $(*)$ och $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u}$ $(**)$. Genom att derivera $\frac{\partial f}{\partial s}$ m.a.p. s och genom att åter tillämpa kedjeregeln får vi att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial s} \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial v}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \quad (\dagger)$$

Derivering av $\frac{\partial f}{\partial t}$ m.a.p. t och kedjeregeln ger på samma sätt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial t} \overset{(**)}{=} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial v}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial v}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \quad (\dagger\dagger)$$

Därmed är alltså $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \overset{(\dagger),(\dagger\dagger)}{=} \left(\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) + \left(\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) =$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$. $\square$

7. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma y\,dx + x^2 y\,dy$ där γ är kurvstycket $x^2+y^2=1$ ett kvarts varv $(x \geq 0, y \geq 0)$ moturs. (4p)

Lösning: Låt γ_2 vara linjestycket $(0,t)$ där t går från 1 till 0 och γ_3 vara linjestycket $(t,0)$ där t går från 0 till 1. Då kan vi bilda den slutna kurvan $\Gamma = \gamma+\gamma_2+\gamma_3$ med riktning motsols (rita gärna figur!). Med beteckningen $P(x,y) = y$ och $Q(x,y) = x^2 y$ har vi att $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ och $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$. Greens formel ger nu att kurvintegralen över den *slutna* kurvan Γ kan beräkna som $\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$ där $D = \{(c,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Med andra ord är $\int_\gamma y\,dx + x^2 y\,dy = \int_\Gamma y\,dx + x^2 y\,dy - \int_{\gamma_2} y\,dx + x^2 y\,dy - \int_{\gamma_3} y\,dx + x^2 y\,dy$ där man kan använda Greens formel för att beräkna $\int_\Gamma y\,dx + x^2 y\,dy = \iint_D (2xy-1)\,dx\,dy$ medan $\int_{\gamma_2} y\,dx + x^2 y\,dy$ och $\int_{\gamma_3} y\,dx + x^2 y\,dy$ kan beräknas som vanliga kurvintegraler då kurvorna γ_2 och γ_3 endast är linjestycken. Vi får

$$\Gamma: \quad \iint_D (2xy-1)\,dx\,dy \quad \left\{\begin{array}{ll} x = r\cos\theta & \\ y = r\sin\theta & \frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \\ 0 \leq r \leq 1 & \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} & \end{array}\right\} =$$
$$= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (2r\cos\theta\, r\sin\theta - 1)\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\left(\frac{r^3}{3}\sin 2\theta - \theta\right) r\right]_0^1 d\theta =$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\,d\theta - \int_0^{\pi/2} \theta\,d\theta = -\frac{1}{6}(\cos\pi - \cos 0) - \left(\frac{\pi^2}{8} - 0\right) = \frac{1}{3} - \frac{\pi^2}{8}$$
$$\gamma_2: \quad \int_{\gamma_2} y\,dx + x^2 y\,dy = \int_1^0 1\,dt = -1$$
$$\gamma_3: \quad \int_{\gamma_3} y\,dx + x^2 y\,dy = 0$$
$$\Rightarrow \int_\gamma y\,dx + x^2 y\,dy = \frac{1}{3} - \frac{\pi^2}{8} - (-1) = \frac{4}{3} - \frac{\pi^2}{8}.$$ $\square$