Tentamen i Flervariabelanalys, 5p

Distanskurs
7 januari, 2007 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844)

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna skall vara *utförligt* redovisade! Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: `http://www.hh.se/staff/erja` → `Teaching` → `Matematik 1-20` → `Delkurs 4: Flervariabelanalys` → `070107: lösning`

1. Formulera och bevisa Cauchy Schwarz olikhet. (3p)

2. Låt $F(D) = \iint_D \dfrac{dx\,dy}{(2x+y)^{3/2}}$. Beräkna
   (a) $F(D)$ om $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2, 3 \le y \le 4\}$. (3p)
   (b) $F(D)$ om D är det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = x^2$, $y = x$ och av $x \le 1$. (Tips: Derivera $\ln|x + \sqrt{x^2-1}|$.) (3p)
   (c) $\lim_{n\to\infty} F(D)$ om $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 1 \le y \le n\}$. (4p)

3. Bestäm samtliga extrempunkter och avgör deras karaktär för funktionen $f(x,y) = 3x^3 - y^2 + 6xy - 72x$. (3p)

4. Bestäm $f(x,y)$ så att $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = xe^{x^2+y/2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + \frac{1}{4}e^{x^2+y/2}$, $f(0,0) = -1$, $f(1,-2) = -8$ och $f(2,-6) = e$. (3p)

5. Visa att $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le\pi^2} \ln(2 + \sin x + \cos y)\,dx\,dy \;\le\; 2\pi^3 \ln 2$. (3p)

6. Bevisa att $\Delta f(s,t) = \frac{1}{2}\Delta f(u,v)$ vid substitutionen $s = u+v$, $t = u-v$ där Δ är Laplaceoperatorn som definieras av $\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. (4p)

7. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma y\,dx + x^2 y\,dy$ där γ är kurvstycket $x^2+y^2 = 1$ ett kvarts varv $(x \ge 0, y \ge 0)$ moturs. (4p)

LYCKA TILL!